

## Gleichstromkreise analysieren

Der Umgang mit elektrischen Geräten und Komponenten ist ein wesentlicher Tätigkeitsbereich von Informatikerinnen und Informatikern.

Für die Auswahl, Wartung und Anpassung dieser Geräte müssen Sie die elektrischen Grundregeln im Stromkreis kennen und anwenden können.

Des weiteren müssen Sie die Auswirkungen elektrischer und magnetischer Vorgänge einordnen können, die beim Aus-, Ein- und Umschalten von Stromkreisen mit Kapazitäten und Induktivitäten auftreten.

In diesem Lernmodul wird daher im Lernbereich 1 auf die elektrischen Grundgrößen und die Grundgesetze des elektrischen Stromkreises eingegangen.

Das elektrische und magnetische Feld sowie die Vorgänge beim Aus-, Ein- und Umschalten von Stromkreisen mit Kapazitäten und Induktivitäten werden im Lernbereich 2 dargestellt.

Alle notwendigen Informationen und Arbeitsunterlagen sind in diesem Lernmodul und in dem Modul „Formeln und Datenblätter“ enthalten.

Dieses Lernmodul ist im häuslichen Studium zu erarbeiten.

Der benötigte Zeitaufwand liegt bei ca. 13 Stunden.

Zusätzlich finden in den semesterbezogenen Präsenzphasen 3 Stunden Festigung und Vertiefung fachspezifischer und fächerübergreifender Zusammenhänge sowie die Beschreibung von Lösungsverfahren zur Bearbeitung typischer Aufgaben und Problemstellungen statt.

### LERNMODUL 1

#### Ziele

#### Ausgangssituation

#### Planung

**Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Spannung, Strom, Widerstand .....</b>	<b>3</b>
1.1 Elektrische Spannung .....	3
1.2 Elektrische Stromstärke und Stromdichte .....	8
1.3 Elektrischer Widerstand .....	13
1.4 Grundgesetze im elektrischen Stromkreis .....	20
1.4.1 Ohmsches Gesetz .....	20
1.4.2 Kirchhoffsche Gesetze .....	25
1.5 Leistung und Arbeit am Widerstand .....	29
1.6 Widerstandsschaltungen .....	40
<b>2 Elektrische und magnetische Felder .....</b>	<b>61</b>
2.1 Elektrisches Feld .....	61
2.1.1 Elektrische Feldstärke und Spannung .....	63
2.1.2 Influenz und Verschiebungsdichte .....	66
2.1.3 Kapazität und Kondensatoren .....	68
2.1.4 Schaltvorgänge am Kondensator .....	70
2.2 Magnetisches Feld .....	72
2.2.1 Magnetische Feldgrößen .....	73
2.2.2 Krafteinwirkung auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld .....	76
2.2.3 Elektromagnetische Induktion .....	79
2.2.4 Schaltvorgänge an der Spule .....	83
<b>Lösungsanhang .....</b>	<b>90</b>

## 1 Spannung, Strom, Widerstand

### Lernbereich

### 1.1 Elektrische Spannung

Alle heute bekannten Phänomene der Chemie und der Elektrotechnik beruhen auf der Bewegung von elektrischer Ladung oder auf der Wechselwirkung von Ladungsträgern miteinander.

#### Elektrische Ladung

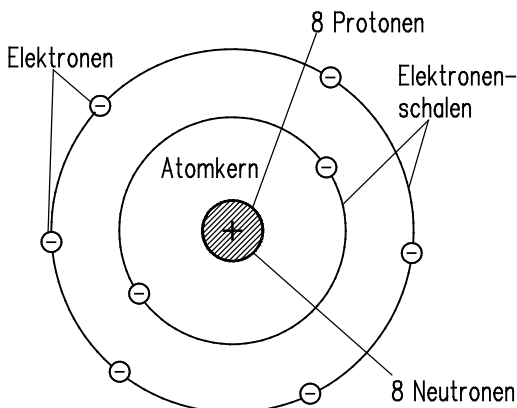


Abbildung 1 Bohrsches Atommodell

Eine anschauliche Beschreibung des Ursprunges der elektrischen Ladung liefert das **Bohrsche Atommodell**. Nach diesem Modell ist die Materie aus Atomen aufgebaut. Diese Atome wiederum bestehen aus einem Kern und einer diesen Kern umgebenden Hülle (siehe Abbildung 1).

Der Atomkern enthält nahezu die gesamte Masse des Atoms und besteht aus den **Protonen** und **Neutronen**. Die Protonen sind die Träger der **positiven Elementarladung  $e$** , die Neutronen sind elektrisch ungeladen.

Die Atomhülle wird von den **Elektronen** gebildet, den Trägern der **negativen Elementarladung  $-e$** , die sich fast masselos auf Kreis ähnlichen Bahnen um den Atomkern bewegen.

Die Stabilität der Atome beruht auf der **Bindungskraft** zwischen den Elektronen und Protonen auf Grund der unterschiedlichen elektrischen Ladung. Aus der Physik ist bekannt:

**Ungleichartige Ladungen ziehen sich an, gleichartige Ladungen stoßen sich ab.**

Nach außen ist ein Atom elektrisch neutral, da die Anzahl von Protonen und Elektronen gleich ist.

#### Elementarladung $e$

Das Formelzeichen für die **elektrische Ladung** ist  **$Q$** , ihre Einheit 1 Coulomb (1 C). Die Ladungsmenge 1 C entspricht der Ladungsmenge von  $6,25 \cdot 10^{18}$  Protonen. Somit ergibt sich für die Elementarladung eines

- Protons  $Q_P = e = +0,16 \cdot 10^{-18} \text{ C}$
- Elektrons  $Q_E = -e = -0,16 \cdot 10^{-18} \text{ C}$

#### Elektrisch geladene Körper

Im elektrisch ungeladenen Zustand ist die Körperladung eines Körpers gleich Null. Ein Körper gerät in den elektrisch geladenen Zustand, wenn der Hülle seiner Atome Elektronen zugeführt oder entnommen werden und die Anzahl der Protonen der Kerne gleich bleibt.

**Elektronenmangel führt zu einer positiven Körperladung  $Q > 0$ .**

**Elektronenüberschuss führt zu einer negativen Körperladung  $Q < 0$ .**

Alle Materialien können nach der Art der vorhandenen beweglichen Ladungsträger eingeteilt werden. Man unterscheidet:

### **Elektrische Leiter**

Anschaulich lässt sich die gute Leitfähigkeit von elektrischen Leitern am Beispiel der Metalle erklären.

Im Metallgitter liegen die Atome relativ dicht beieinander. Dies hat zur Folge, dass die Elektronen der äußersten Schale zu dem benachbarten Atomkern den gleichen Abstand haben wie zu dem eigenen Atomkern. Die Anziehungskräfte heben sich gegenseitig auf und die Elektronen der Außenschale der Atome im Metallgitter werden frei beweglich. Diese Elektronen werden daher auch als „**freie Elektronen**“ oder „**Elektronengas**“ bezeichnet.

Dieses Elektronengas ermöglicht den Ladungstransport in metallischen Leitern. So stehen in  $1 \text{ cm}^3$  Kupfer etwa  $5 \cdot 10^{23}$  freie Elektronen zur Verfügung, was die gute elektrische Leitfähigkeit dieses Metalles bewirkt.

### **Nichtleiter**

In Nichtleitern sind keine freien Elektronen vorhanden, die elektrische Leitfähigkeit ist sehr gering, im Idealfall gleich Null. Diese Stoffe werden daher als Isolierstoff eingesetzt.

Erst eine sehr hohe Energiezufuhr kann bei diesen Materialien zur Bildung von freien Ladungsträgern führen. Die damit verbundene Verminderung der Isolationseigenschaften ist bei dem Einsatz der verschiedenen Isolierwerkstoffe bei hohen Temperaturen zu beachten.

### **Halbleiter**

Die elektrischen Eigenschaften von Halbleitern liegen zwischen denen der elektrischen Leiter und den Nichtleitern. Bei sehr tiefen Temperaturen, in der Nähe des absoluten Nullpunktes ( $\vartheta \approx 0 \text{ K}$ ), sind Halbleiter fast ideale Nichtleiter.

Geringe Energiezufuhr führt bei diesen Materialien jedoch zu Bildung von freien Elektronen, die eine Leitfähigkeit bewirken. Die Leitfähigkeit nimmt bei steigender Temperatur zu.

### **Ionenleiter**

Während in den Festkörpern die elektrische Leitung durch die Bewegung der Elektronen bewirkt wird, kommt es in Elektrolyten und Gasen zur Ionenleitung.

**Ionen** sind Atome, die mehr oder weniger Elektronen haben als Protonen und nach Außen als positiv oder negativ geladene Teilchen erscheinen.

Ein Ladungstransport mit Ionen ist immer auch mit einem Massetransport verbunden. Dieser Effekt wird z.B. in der Galvanotechnik zur Herstellung von dünnen Schichten genutzt.

## Elektrische Spannung

Für einen Ladungstransport reicht das Vorhandensein von beweglichen Ladungsträgern nicht aus. Für das Fließen eines elektrischen Stromes muss von außen eine Kraft auf die beweglichen Ladungsträger einwirken und sie zu einer gerichteten Bewegung zwingen. Die Ursache dieser Kraftwirkung wird als elektrische Spannung  $U$  bezeichnet.

Elektrische Spannung entsteht durch Ladungstrennung. Auf Grund der Anziehung zwischen ungleichartigen Ladungen muss bei der Ladungstrennung Arbeit gegen diese Anziehungskraft verrichtet werden. Bei der Ladungstrennung entsteht ein Pol mit **Elektronenmangel (Pluspol)** und ein zweiter Pol mit **Elektronenüberschuss (Minuspol)**.

**Das Ausgleichsbestreben der getrennten Ladungen bezeichnet man als elektrische Spannung.**

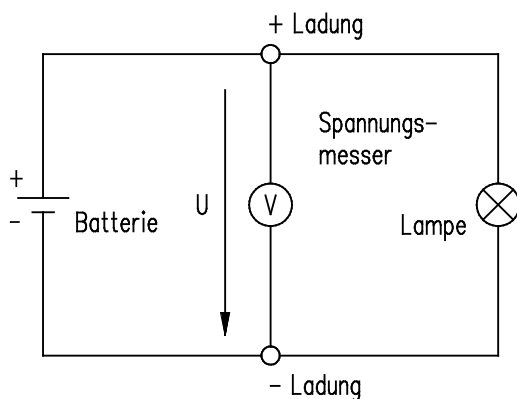
Die Größe der elektrischen Spannung ist proportional zur aufgewandten Arbeit  $W$  und umgekehrt proportional zur getrennten Ladungsmenge  $Q$ . Für die Berechnung gilt:

$$U = \frac{W}{Q}$$

Die Einheit der Spannung ist Volt. Aus obiger Gleichung berechnet sie sich zu:

$$[U] = \frac{J}{C} = \frac{Nm}{As}$$

Die bei der Ladungstrennung aufgebrauchte Arbeit wird in den getrennten Ladungen als **elektrische Energie  $W_{el}$**  gespeichert. Die für diese Arbeit erforderliche Energie wird dabei durch nicht elektrische Prozesse in einer **Spannungsquelle**, z.B. chemische Prozesse in einer Batterie, aufgebracht.



### Spannungsmessung

Eine Spannung liegt immer dann vor, wenn zwischen zwei Punkten (Polen) eine unterschiedliche Ladung herrscht. Zur Messung der Spannung verbindet man die beiden Klemmen des **Spannungsmessers** mit den Punkten, zwischen denen die Spannung zu bestimmen ist (Abbildung 2).

Abbildung 2 Spannungsmessung

## Spannungserzeugung

Bei der Spannungserzeugung in den Spannungsquellen findet eine **Energiewandlung** statt.

Die elektrische Energie wird aus einer anderen Energieform umgewandelt. Die von der Spannungsquelle erzeugte Spannung wird mit **Quellenspannung**  $U_q$  oder  $U_0$  bezeichnet. In Abbildung 3 sind die Schaltzeichen einiger Spannungsquellen dargestellt.

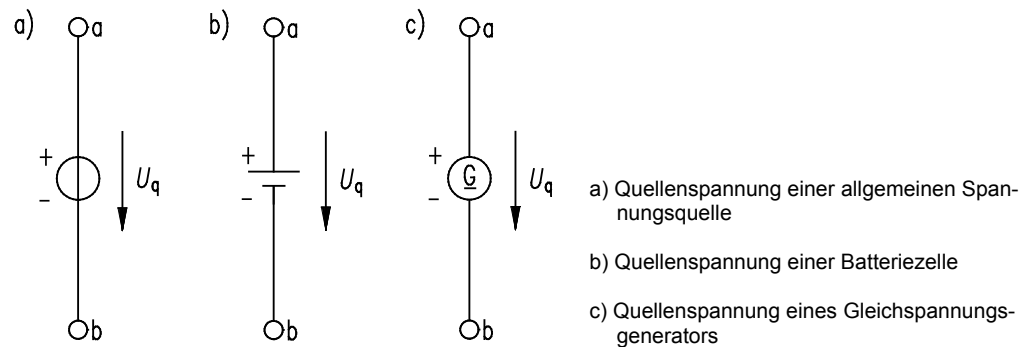


Abbildung 3 Schaltzeichen von Spannungsquellen

Im Folgenden werden die am häufigsten in der Technik eingesetzten Arten der Spannungserzeugung dargestellt.

## Spannungserzeugung durch chemische Vorgänge

Diese Art der Spannungserzeugung wird an dem Beispiel eines Zink-Kupfer-Elementes dargelegt.

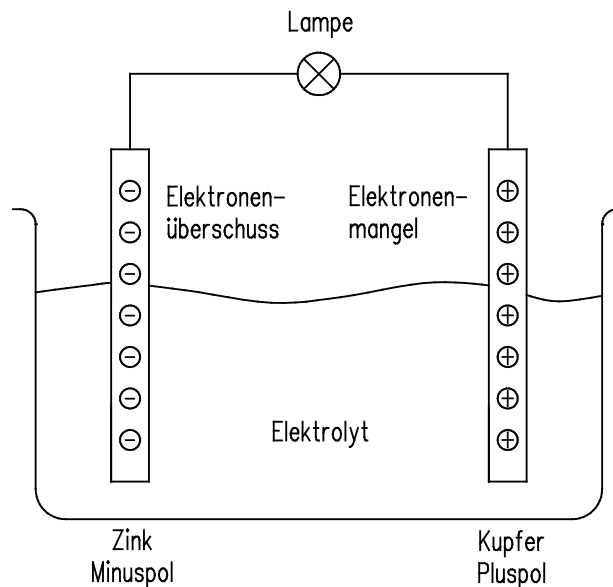


Abbildung 4 Zink-Kupfer-Element als Spannungsquelle

Ein Kupfer- und ein Zinkblech werden in einen Elektrolyten, z.B. verdünnte Schwefelsäure, eingetaucht (Abbildung 4). Die Platten reagieren chemisch mit dem Elektrolyten.

Der Kupferplatte werden dabei Elektronen entnommen, sie bildet den Pluspol der Spannungsquelle, auf der Zinkplatte entsteht ein Elektronenüberschuss, sie bildet den Minuspol. Zwischen den beiden Platten entsteht eine Spannung.

Es wird chemische Energie in elektrische Energie umgewandelt.

Diese Art der galvanischen Elemente wird als **Primärelemente** bezeichnet, weil die Spannung unmittelbar aus dem chemischen Prozess erzeugt wird. Alle **Batterien** sind Primärelemente.

Im Gegensatz dazu stehen die **Sekundärelemente** oder **Akkumulatoren**, die zur Spannungserzeugung zunächst elektrisch aufgeladen werden müssen.

### Spannungserzeugung durch Induktion

Bewegt man eine Spule in einem magnetischen Feld, oder einen Magneten in einer Spule, wird in der Spule durch Induktion eine Spannung erzeugt. Diese Art der Spannungserzeugung wird in allen **Generatoren** der Kraftwerke, aber auch in Lichtmaschinen oder Fahrraddynamos genutzt.

Bei diesen Verfahren wird über die magnetische Induktion mechanische Energie in elektrische Energie umgewandelt.

### Spannungserzeugung durch Licht

Bei einigen Halbleiterwerkstoffen wie z.B. Selen erfolgt eine Ladungstrennung im Inneren des Materials bei Lichteinfall. Es wird die Energie der einfallenden elektromagnetischen Strahlung (Licht) in elektrische Energie umgewandelt (**Fotovoltaik**).

Für großtechnische Anwendungen werden die Bauelemente als **Solarzellen** zu Sonnenbatterien zusammengeschaltet und zur Energieversorgung von z.B. Häusern, Parkuhren oder Satelliten eingesetzt. Als **Fotoelemente** finden sie Anwendung z.B. in Belichtungsmessern.

### Spannungserzeugung durch Wärme

Verbindet man zwei verschiedene Metalle miteinander und erwärmt die Kontaktstelle, ist eine Spannung messbar. Die Wärmeenergie erzeugt durch Ladungstrennung eine von der Temperatur abhängige elektrische Energie.

Diese **Thermoelemente** setzt man als Temperaturfühler zur elektrischen Temperaturmessung ein.

### Spannungserzeugung durch Druck und Zug

In einigen Kristallen, den **Piezo-Kristallen**, erfolgt eine Ladungstrennung bei mechanischer Verformung durch Zug oder Druck. Die bei dieser Energiewandlung entstehende **Piezo-Spannung** nutzt man z.B. in Kristallmikrofonen, Kristalltonabnehmern oder zur elektrischen Druckmessung.

## 1.2 Elektrische Stromstärke und Stromdichte

### Elektrischer Strom

Als elektrischen Strom bezeichnet man die gerichtete Bewegung von freien Ladungsträgern in den leitfähigen Materialien eines Stromkreises.

Ein elektrischer Stromkreis besteht aus einer Spannungsquelle, der Leitung und einem Verbraucher (Abbildung 5).

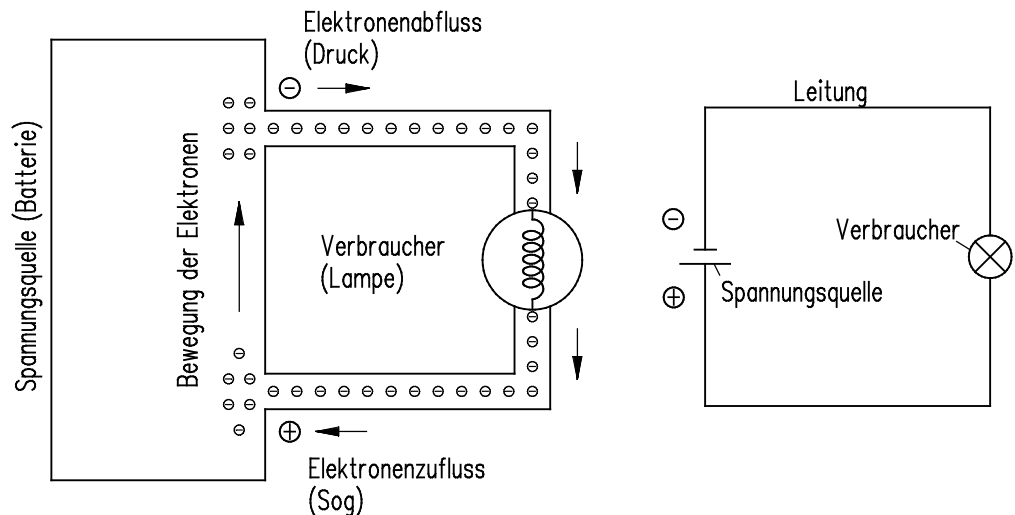


Abbildung 5 Elektrischer Stromkreis

Werden Plus- und Minuspol einer Spannungsquelle über einen Verbraucher miteinander verbunden, kommt es zu einem Elektronenfluss. Auf Grund der Ladungstrennung in der Spannungsquelle herrscht am Minuspol Elektronenüberschuss und am Pluspol Elektronenmangel. Der damit verbundene Druck bzw. Sog übt eine Kraft auf die freien Elektronen in dem metallischen Leiter aus, es kommt zu einem Elektronenabfluss vom Minuspol in Richtung Pluspol.

**Ursache für die gerichtete Bewegung ist die durch die Ladungstrennung hervorgerufene Kraftwirkung der Spannung auf elektrische Ladungen.**

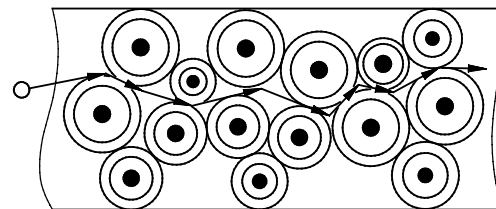


Abbildung 6 Bewegung eines Elektrons in einer Leitung

Durch Energieumwandlung in der Spannungsquelle erfolgt eine permanente Ladungstrennung, die die abfließenden Ladungen ausgleicht und eine konstante Spannung zwischen den Polen bewirkt. In der Spannungsquelle fließen dabei Elektronen vom Pluspol zum Minuspol.

Es liegt ein geschlossener Ladungsfluss oder elektrischer Stromfluss vor.

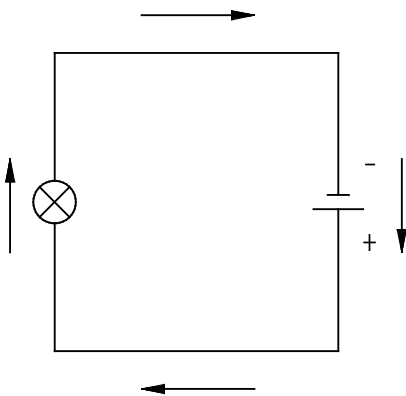
Die freien Elektronen bewegen sich beim Stromfluss nicht gradlinig durch den Leiter, sondern stoßen auf ihrem Weg mit den Atomrümpfen des Metallgitters zusammen. Es kommt zu einem Zickzack-Weg und der mittlere zurückgelegte Weg beträgt nur Bruchteile von Millimetern in der Sekunde (Abbildung 6).



Der **elektrische Impuls**, d.h. die Kraftwirkung durch die Spannung auf Ladungsträger, breitet sich jedoch mit nahezu Lichtgeschwindigkeit ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ) aus. Eine Vorstellung von der Impulsausbreitung liefert das Bild eines mit Billardkugeln gefüllten Rohres. Wird an einem Ende des Rohres eine weitere Kugel hineingedrückt, fällt fast augenblicklich am anderen Ende des Rohres eine Kugel heraus, obwohl sich die einzelnen Kugeln nur einige Zentimeter bewegt haben. Entsprechend breitet sich die Kraftwirkung der Spannung auf die freien Ladungsträger fast verzögerungsfrei über den gesamten Stromkreis aus.

### Stromrichtung

a) Technische Stromrichtung



b) Elektronenstromrichtung

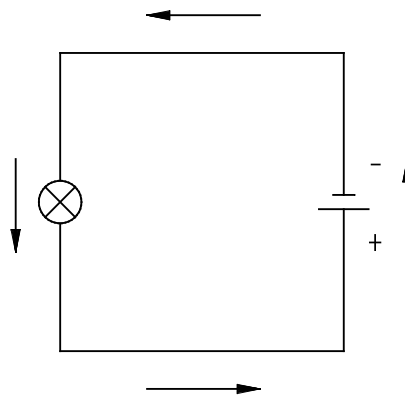


Abbildung 7 Stromrichtungen im Stromkreis

Die Stromrichtung wurde schon früh ohne Kenntnis der wirklichen Ladungsbewegungen festgelegt:

**In einem Stromkreis ist die positive Stromrichtung außerhalb von Spannungsquellen vom Pluspol zum Minuspol. Innerhalb von Spannungsquellen verläuft sie von Minus nach Plus.**

Diese Festlegung wird als **technische Stromrichtung** bezeichnet (Abbildung 7a). Der Ladungstransport erfolgt in Leitern durch die Bewegung der Elektronen.

**Die Elektronenstromrichtung erfolgt außerhalb der Spannungsquelle vom Minuspol zum Pluspol, in den Spannungsquellen vom Plus- zum Minuspol** (Abbildung 7b).

Die technische Stromrichtung wurde für elektrische Schaltungen beibehalten, da ihre konsequente Anwendung auch die richtigen Ergebnisse liefert. In Stromlaufplänen wird die Richtung des Stromes (technische Stromrichtung) durch Pfeile gekennzeichnet.

### Stromstärke

Die elektrische Stromstärke ist ein Maß für die pro Zeiteinheit transportierte Ladungsmenge und es gilt:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Die Einheit der Stromstärke ist Ampère. Aus der obigen Formel ergibt sich für die Einheit Ampère folgender Zusammenhang:

$$[I] = A = \frac{C}{s}$$

Obwohl sich die Stromstärke aus der Ladung ableiten lässt, hat es sich als sinnvoll erwiesen, für das internationale Einheitensystem oder SI-System (Système International d'Unités) die elektrische Stromstärke als Basiseinheit zu wählen. Ihre Definition lautet wie folgt:

**1 Ampère ist die Stärke eines zeitlich unveränderten elektrischen Stromes, der durch zwei im Vakuum parallele im Abstand 1 m voneinander angeordnete unendlich lange geradlinige Leiter von vernachlässigbar kleinem kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 m Leiterlänge elektrodynamisch die Kraft  $0,2 \cdot 10^{-6}$  N (Newton) hervorruft.**

Somit berechnet sich die Ladungsmenge, die bei Gleichstrom, d.h.  $I = \text{konst.}$ , in einem Zeitintervall transportiert wird, nach der Gleichung

$$Q = I \cdot t$$

und die Einheit Coulomb aus den Basiseinheiten für Stromstärke und Zeit nach

$$[Q] = C = A \cdot s.$$

#### Lehrbeispiel 1

Durch einen Kupferleiter mit einem Querschnitt von  $1 \text{ mm}^2$  fließt ein Strom von einem Ampere.

*Wie viele Elektronen bewegen sich in einer Sekunde durch die Querschnittsfläche des Leiters und wie groß ist die mittlere Elektronengeschwindigkeit, wenn die Anzahl der freien Elektronen in  $1 \text{ cm}^3$  Kupfer  $5 \cdot 10^{23}$  ist?*

#### **Lösung**

In einer Sekunde fließt eine Ladung von  $Q = 1 \text{ As}$  durch den Leiterquerschnitt. Mit der elektrischen Elementarladung des Elektrons von

$$Q_e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

ergibt sich die Anzahl der Elektronen  $n$  nach

$$n = \frac{1 \text{ As}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 6,24 \cdot 10^{18}$$

Diese Elektronenzahl befindet sich in einem Kupfervolumen von

$$V = \frac{1000 \text{ mm}^3}{5 \cdot 10^{23}} \cdot 6,24 \cdot 10^{18} = 12,48 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^3$$

Dieses Volumen entspricht einem Zylinder mit einer Querschnittsfläche von  $1 \text{ mm}^2$  und eine Länge  $l$  von

$$l = 12,48 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Um die für die Stromstärke benötigte Ladungsmenge zu erreichen, muss die Strecke  $l$  von den freien Elektronen in 1 s zurückgelegt werden, womit sich eine Geschwindigkeit von

$$v_e = \frac{12,48 \cdot 10^{-3} \text{ mm}}{1 \text{ s}} = 12,48 \cdot 10^{-3} \text{ mm/s}$$

ergibt.

### Strommessung

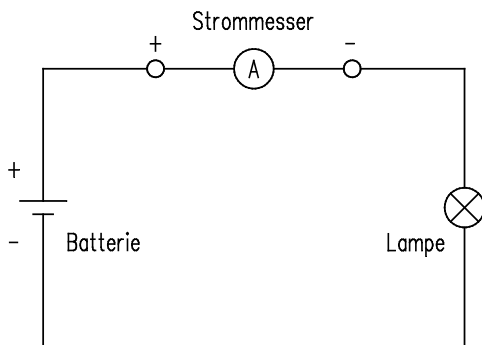


Abbildung 8 Schaltung eines Strommessgerätes

In einem geschlossenen Stromkreis hat der elektrische Strom an jeder Stelle die gleiche Stromstärke. Für die Strommessung wird die Leitung des Stromkreises an einer beliebigen Stelle aufgetrennt und das **Strommessgerät (Ampèremeter)** in die Leitung geschaltet (Abbildung 8).

Für eine richtige Strommessung ist sicherzustellen, dass der gesamte zu messende Strom durch das Messgerät fließt.

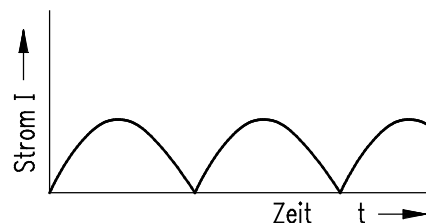
### Stromarten

Bei den verschiedenen Stromarten wird nach der Bewegungsrichtung der Ladungsträger unterschieden.



a) Reiner Gleichstrom

Abbildung 9 Gleichströme



b) Pulsierender Gleichstrom

Bei **Gleichstrom** fließt der Strom stets in die gleiche Richtung. Ist die Stromstärke, d.h. die Strömungsgeschwindigkeit nach dem Einschalten konstant, handelt es sich um einen „reinen Gleichstrom“ (Abbildung 9a). Ändert sich die Stromstärke bei gleich bleibender Stromrichtung, spricht man von einem „pulsierenden Gleichstrom“ (Abbildung 9b).

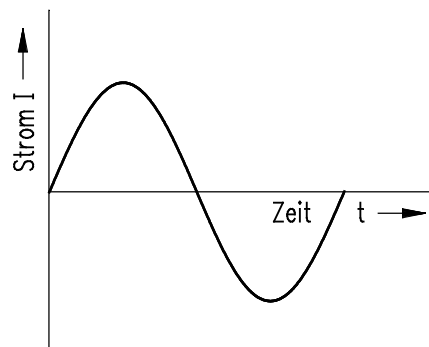
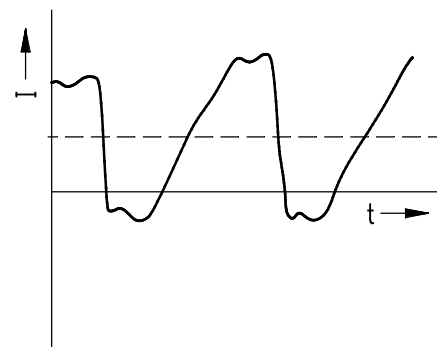


Abbildung 10 a) Wechselstrom



b) Mischstrom

Bei **Wechselstrom** bewegen sich die Ladungsträger in wechselnder Richtung um ihre Ruhelage und die Stromstärke ändert sich ständig. Abbildung 10a zeigt den Verlauf eines sinusförmigen Wechselstromes. Unabhängig vom Stromverlauf ist notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Wechselstromes, dass der arithmetische Mittelwert des Stromes über eine Schwingungsperiode gleich Null ist.

Überlagert man einen Gleichstrom mit einem Wechselstrom beliebiger Kurvenform, erhält man einen **Mischstrom**. In Abbildung 10b ist ein schematischer Verlauf dargestellt. Bei einem Mischstrom ist der arithmetische Mittelwert über eine Schwingungsperiode ungleich Null. Alle pulsierenden Gleichströme (z.B. Abbildung 9b) gehören zu den Mischströmen.

### Stromdichte

Jeder elektrische Strom ist mit einer Erwärmung des leitenden Mediums verbunden. Dieser Effekt wird technisch ausgenutzt, z.B. bei den Glühfäden von Leuchtmitteln oder bei elektrischen Heizplatten. Unerwünscht ist eine Erwärmung jedoch z.B. bei den Leitungen von Versorgungssystemen. Ursache für die Erwärmung sind die Stöße der Elektronen mit den Atomrümpfen, die zu erhöhten Schwingungen angeregt werden.

Der Grad der Erwärmung eines Leiters wird nicht von der Stromstärke allein, sondern auch vom Querschnitt des Leiters bestimmt. Als Maß für die Erwärmung wird die **Stromdichte** als Quotient aus Stromstärke und Leiterquerschnitt definiert:

$$S = \frac{I}{A}$$

Die Einheit der Stromdichte ist  $[S] = \frac{A}{mm^2}$

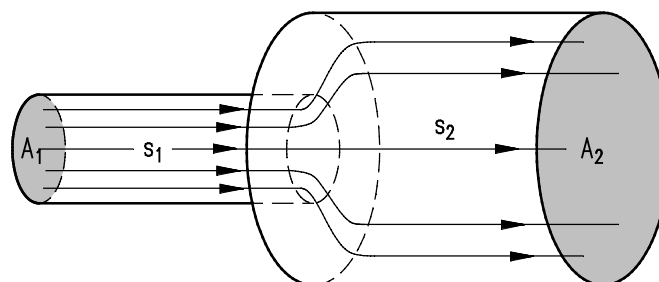


Abbildung 11 Stromdichte im Leiter

Bei dem in Abbildung 11 dargestellten Leiter wird deutlich, dass bei konstantem Strom die Stromdichte bei kleiner werdendem Leiterquerschnitt ansteigt.

Mit  $S_1 = \frac{I}{A_1}$  und  $S_2 = \frac{I}{A_2}$  gilt  $S_1 > S_2$ .

Je höher die Stromdichte in einem Leiter ist, umso stärker wird dieser erwärmt. Bei einer höheren Stromdichte ist die Elektronengeschwindigkeit und damit der bei den Stößen auf die Atome übertragene Impuls größer.

Um unzulässige Erwärmung bei Leitern zu verhindern werden in der DIN VDE 0100 maximale Ströme für die Leitungen festgelegt. Dabei werden neben der Stromdichte auch die Wärmeableitung und die Materialeigenschaften wie z.B. Schmelztemperatur berücksichtigt.

### Lehrbeispiel 2

Für bewegliche Leiter ist nach DIN VDE 0100 für den Querschnitt  $A = 0,75 \text{ mm}^2$  ein Strom von  $I = 10 \text{ A}$ , für den Querschnitt  $A = 25 \text{ mm}^2$  ein Strom von  $I = 100 \text{ A}$  zulässig.

*Wie groß sind die zulässigen Stromdichten?*

### **Lösung**

$$S_1 = \frac{10 \text{ A}}{0,75 \text{ mm}^2} = 13,33 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

$$S_2 = \frac{100 \text{ A}}{25 \text{ mm}^2} = 4,0 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

Man erkennt, dass die zulässige Stromdichte bei kleinem Leiterquerschnitt deutlich größer ist. Ursache dafür ist das günstigere Verhältnis von Oberfläche zu Volumen, was zu einer besseren Wärmeableitung führt. Daher sind in dünnen Leiterbahnen auf Platinen oder in integrierten Schaltungen sehr hohe Stromdichten und damit relativ hohe Ströme möglich.

## **1.3 Elektrischer Widerstand**

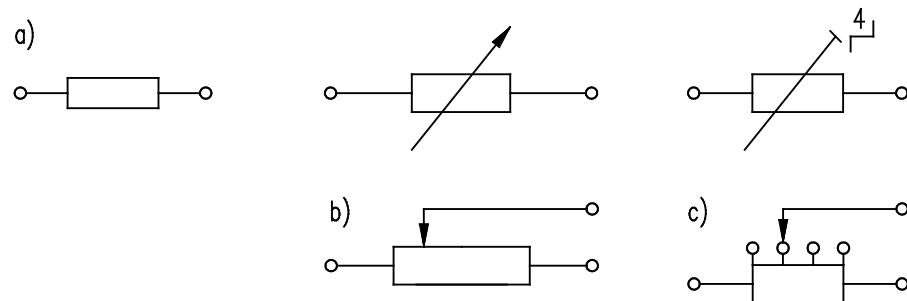
Der Begriff elektrischer Widerstand umfasst zum einen die physikalische Eigenschaft „elektrischer Widerstand“, zum anderen das Bauteil, dass diese Eigenschaft besitzt.

Die **Eigenschaft elektrischer Widerstand** lässt sich anschaulich an dem schon bekannten Modell des Ladungstransportes in einem metallischen Leiter erklären.

Bei ihrer gerichteten Bewegung durch den Leiter stoßen die freien Elektronen mit den Atomrümpfen zusammen und geben einen Teil ihrer Energie an die Atome ab. Diese „innere Reibung“ führt zur Umwandlung eines Teiles der elektrischen Energie in Wärmeenergie im Leiter.

Damit behindert, oder anders gesagt, begrenzt der Widerstand den elektrischen Strom.

Der elektrische **Widerstand als Bauelement** wird an den Stellen eines Stromkreises benötigt, wo die Stromstärke auf einen bestimmten Wert zu begrenzen ist. Schaltzeichen für die Ausführung als Festwiderstand oder als veränderlicher Widerstand sind in Abbildung 12 dargestellt.



- a) Festwiderstand
- b) Stetig einstellbarer Widerstand, z.B. Potentiometer
- c) Stufig einstellbarer Widerstand, z.B. Anlasser von Gleichstrommotoren

Abbildung 12 Schaltzeichen für Widerstände

Das Formelzeichen für den elektrischen **Widerstand** ist **R**, die Einheit ist Ohm.

Bei einigen Schaltungen ist es zweckmäßig, mit dem Kehrwert des Widerstandes, dem **elektrischen Leitwert G**, zu rechnen:

$$G = \frac{1}{R}$$

Die Einheit des Leitwertes ist Siemens, es gilt  $[G] = S = \frac{1}{\Omega}$

### Spezifischer Widerstand und Leitwert

#### Der Widerstand eines Leiters ist proportional zur Leiterlänge l

$$R \sim l.$$

Durch das Modell des Ladungstransportes in metallischen Leitern wird dies verdeutlicht. Die Elektronen werden auf ihrem Zickzack-Weg in einen langen Leiter mehr behindert als in einem kurzen, d.h. der Widerstand eines langen Leiters ist größer, als der eines kurzen.

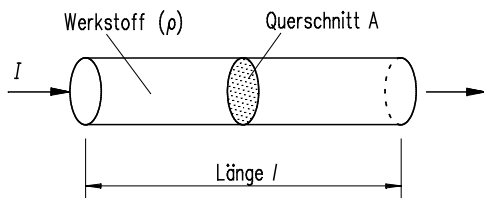
Auf der anderen Seite ist durch das Modell sofort ersichtlich, dass bei einem Leiter mit großem Querschnitt mehr Elektronen vorhanden sind, als bei einem Leiter mit kleinem Querschnitt. Bei gleicher Spannung fließt in dem Leiter mit großem Querschnitt ein höherer Strom, der Widerstand ist also kleiner.

#### Der Widerstand eines Leiters ist umgekehrt proportional zum Leiterquerschnitt A:

$$R \sim \frac{1}{A}$$

Zudem ist der Widerstand eines Leiters abhängig von dem Leiterwerkstoff, so hat z.B. Silber einen geringeren Widerstand als Eisen. Dieses hängt mit der Gitterstruktur des Leitermaterials, der Anzahl der Elektronen in den äußersten Schalen der Atome und anderen physikalischen Eigenschaften zusammen. Diese Eigenschaften fasst man in dem **spezifischen Widerstand**  $\rho$  (rho) des Materials zusammen und es gilt:

**Der Widerstand ist proportional zum spezifischen Widerstand  $\rho$**



$$R \sim \rho$$

Fasst man alle Einflussgrößen für einen Widerstand (Abbildung 13) zusammen, erhält man folgende Gleichung:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Abbildung 13 Einflussgrößen auf den Widerstand

Üblicherweise wird die Leiterlänge  $l$  in Metern (m) und der Leiterquerschnitt  $A$  in Quadratmillimetern ( $\text{mm}^2$ ) angegeben. Umstellung der vorherigen Gleichung nach dem spezifischen Widerstand ergibt folgende Formel:

$$\rho = \frac{R \cdot A}{l}$$

Die Einheit des spezifischen Widerstandes lautet somit  $[\rho] = \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} = 10^{-6} \Omega$

Aus der Gleichung für den spezifischen Widerstand ersieht man, dass zur Bestimmung dieser Größe bei bekannten Leiterabmessungen nur noch der Widerstand bestimmt werden muss.

In Tabelle 1 sind die spezifischen Widerstände  $\rho_{20}$  für einige Metalle und Legierungen für eine Umgebungstemperatur von 20 °C aufgeführt.

Metalle	$\rho_{20}$ $\frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}$	$\kappa_{20}$ $\frac{\text{m}}{\Omega \text{mm}^2}$	$\alpha_{20}$ $\frac{1}{^\circ\text{C}}$	Legierungen	$\rho_{20}$ $\frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}$	$\kappa_{20}$ $\frac{\text{m}}{\Omega \text{mm}^2}$	$\alpha_{20}$ $\frac{1}{^\circ\text{C}}$
Silber	0,016	62,5	0,0038	Aldrey	0,033	30	0,0036
Kupfer	0,01786	56	0,0039	Bronze	0,036	28	0,0040
Gold	0,022	45,4	0,004	Messing	0,08	12,5	0,0015
Aluminium	0,02857	35	0,0038	Stahldraht	0,13	7,7	0,005
Wolfram	0,055	18	0,0041	Neusilber	0,30	3,33	0,00035
Zink	0,063	16	0,0037	Nickelin	0,43	2,3	0,0002
Nickel	0,10	10	0,0048	Manganin	0,43	2,3	0,00001
Zinn	0,11	9	0,0042	Konstantan	0,50	2	0,00001
Eisendraht	0,12	8,3	0,0052	Nickelchrom	1,1	0,91	0,0002
Platin	0,13	7,7	0,0025				
Blei	0,21	4,8	0,0042				
Quecksilber	0,96	1,04	0,00092				
Wismut	1,2	0,83	0,0042				

Tabelle 1 Stoffkonstanten von Metallen und Legierungen

Wie beim Widerstand hat es sich in der Praxis häufig als sinnvoll erwiesen, die reziproke Größe von  $\rho$  zu nutzen. Sie wird als **spezifische elektrische Leitfähigkeit  $\kappa$**  (kappa) bezeichnet:

$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$

$$\text{mit } [\kappa] = \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2} = \frac{\text{S} \cdot \text{m}}{\text{mm}^2}$$

Für die Berechnung des Widerstandes aus den Kenngrößen eines Leiters und der spezifischen Leitfähigkeit ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$R = \frac{l}{\kappa \cdot A}$$

In Tabelle 1 sind die spezifischen Leitfähigkeiten  $\kappa_{20}$  für einige Materialien bei 20 °C aufgeführt.

#### Lehrbeispiel 1

Eine Transformatorwicklung besteht aus 270 m Kupferdraht mit einem Querschnitt von 0,75 mm<sup>2</sup>.

*Wie groß ist der Widerstand der Wicklung?*

#### **Lösung**

Der Widerstand lässt sich entweder mit der spezifischen Leitfähigkeit des Kupfers oder seinem spezifischen Widerstand berechnen.

$$R = \frac{\rho_{20} \cdot l}{A} = \frac{0,01786 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot 270 \text{ m}}{0,75 \text{ mm}^2}$$

$$R = 6,4296 \Omega$$

oder

$$R = \frac{l}{\kappa_{20} \cdot A} = \frac{270 \text{ m}}{56 \frac{\text{S} \cdot \text{m}}{\text{mm}^2} \cdot 0,75 \text{ mm}^2}$$

$$R = 6,4286 \Omega$$

Die geringfügigen Unterschiede im Ergebnis sind darauf zurückzuführen, dass der spezifische Widerstand in der Tabelle auf den angegebenen Wert gerundet wurde.



Lehrbeispiel 2

Welchen Durchmesser hat ein Aluminiumleiter von 5 km Länge, wenn sein Widerstand 34  $\Omega$  beträgt?

**Lösung**

Die Gleichung  $R = \frac{l}{\kappa_{20} \cdot A}$  wird nach A umgestellt.

$$A = \frac{l}{\kappa_{20} \cdot R} = \frac{5000 \text{ m}}{35 \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2} \cdot 34 \Omega} = 4,20 \text{ mm}^2$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4,20 \text{ mm}^2}{\pi}}$$

$$d = 2,31 \text{ mm}$$

**Kaltleiter PTC (positive temperature coefficient)**

Aus der Physik ist bekannt, dass die Temperatur eines Stoffes auf Schwingungen der Atome oder Moleküle zurückzuführen ist. Je höher die Temperatur eines Stoffes ist, umso stärker schwingen seine Atome oder Moleküle um ihre Ruhelage. Dadurch erhöht sich die Möglichkeit der Zusammenstöße von freien Elektronen mit den Atomrümpfen auf ihrem Weg durch den Leiter. Die Elektronen werden in ihrer Bewegung stärker behindert, das bedeutet, der Widerstand wird größer.

**Kaltleiter sind Stoffe, die im kalten Zustand besser leiten als im heißen Zustand.**

Alle Metalle gehören zu der Gruppe der Kaltleiter. Ihr Widerstand steigt mit zunehmender Temperatur, er hat einen positiven Temperaturkoeffizienten (Abbildung 14).

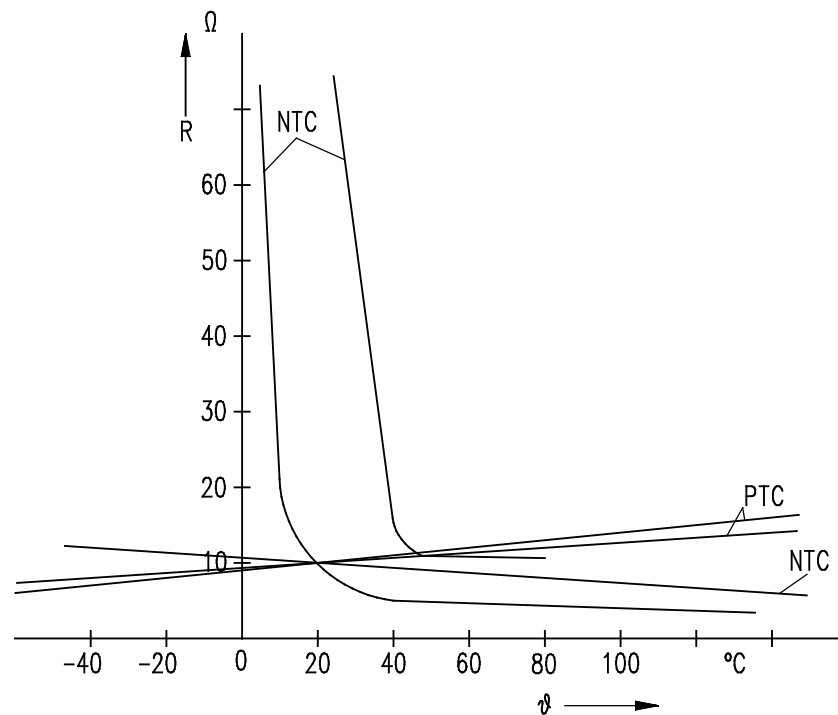


Abbildung 14 Temperaturabhängigkeit von Widerständen

Der Widerstand einiger Metalle wird bei Abkühlung bis in die Nähe des absoluten Nullpunktes ( $0\text{ K} = -273,15\text{ °C}$ ) gleich Null. Man spricht dann von **Supraleitfähigkeit** und von **Supraleitern**. Diese Leiter ermöglichen bei kleinen Leiterquerschnitten sehr hohe Stromstärken. Die technische Nutzung ist, trotz heutiger Fortschritte zu höheren Übergangstemperaturen, immer noch sehr aufwändig.

### Heißleiter NTC (negative temperature coefficient)

Einige Werkstoffe, z.B. Halbleiter, verhalten sich umgekehrt. Ihr Widerstand verringert sich bei zunehmender Temperatur, sie haben somit einen negativen Temperaturkoeffizienten.

**Heißleiter sind Stoffe, die im heißen Zustand besser leiten als im kalten Zustand.**

Eine anschauliche Erklärungsmöglichkeit bieten die Halbleiter. Bei diesen Materialien lösen sich bei Erwärmung Elektronen aus der Atomhülle und stehen als freie Elektronen für die Stromleitung zur Verfügung. Wie aus Abbildung 14 ersichtlich, ist die Widerstandsabnahme bei den NTC-Widerständen deutlich steiler, als die Widerstandszunahme bei den metallischen Kaltleitern. Die Erhöhung der Leitfähigkeit durch die Zunahme der freien Elektronen überwiegt somit bei diesen Stoffen die Zunahme des Widerstandes, die durch die häufigeren Zusammenstöße von Elektronen und Atomen auf Grund der höheren Temperatur erfolgen.

**Temperaturkoeffizient  $\alpha$** 

Wie der spezifische Widerstand ist auch der Temperaturkoeffizient vom Kristallaufbau der einzelnen Stoffe abhängig und somit eine materialspezifische Größe.

**Der Temperaturkoeffizient  $\alpha_{20}$  gibt die relative Widerstandsänderung eines Materials bei einer von 20 °C ausgehenden Temperaturänderung an.**

Die Einheit ist  $[\alpha_{20}] = \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$ .

Der spezifische Widerstand eines Stoffes ist somit nicht nur vom Leitermaterial abhängig, sondern auch eine Funktion der Temperatur. Somit ergibt folgende Beziehung für den temperaturabhängigen Widerstand

$$R_{\vartheta} = \rho_{\vartheta} \cdot \frac{l}{A}$$

Hierbei gilt  $\rho_{\vartheta} = \rho_{20} (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta_{20})$ , mit  $\Delta\vartheta_{20} = \vartheta - 20^{\circ}\text{C}$ .

Die Temperaturkoeffizienten sind ebenfalls in Tabelle 1 für einige Materialien aufgeführt.

Einsetzen des spezifischen Widerstandes in obige Gleichung ergibt:

$$R_{\vartheta} = \rho_{20} \cdot \frac{l}{A} (1 + \alpha_{20} \Delta\vartheta_{20})$$

Definiert man den Widerstand bei 20 °C nach  $R_{20} = \rho_{20} \cdot \frac{l}{A}$  ergibt sich

$$R_{\vartheta} = R_{20} \cdot (1 + \alpha_{20} \Delta\vartheta_{20})$$

Diese lineare Beziehung ermöglicht die Berechnung der Widerstandswerte  $R_{\vartheta}$  bei beliebiger Temperatur  $\vartheta$  ausgehend vom Widerstand  $R_{20}$  des vorliegenden Materials. Sie gilt für elektrische Leiter bei technisch üblichen Umgebungstemperaturen.

Technische Anwendung findet dieses Temperaturverhalten z.B. in **Widerstandsthermometern**.

**Lehrbeispiel 3**

Die Kupferwicklung eines Transformators hat bei Raumtemperatur (20 °C) einen Widerstand von 1,2  $\Omega$ .

*Wie groß ist der Wicklungswiderstand bei einer Betriebstemperatur von 85 °C?*

**Lösung**

$$R_{\vartheta} = R_{20} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta_{20})$$

$$R_{\vartheta} = 1,2 \, \Omega \cdot \left( 1 + 0,0039 \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \cdot 65^{\circ}\text{C} \right)$$

$$R_{\vartheta} = 1,50 \, \Omega$$

#### Lehrbeispiel 4

Der Widerstand einer Aluminiumwicklung beträgt bei 20 °C 42 Ω.

Bei welcher Temperatur wurde ein Widerstand von 52,3 Ω gemessen?

#### Lösung

$$R_{\vartheta} = R_{20} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta \vartheta_{20})$$

$$R_{\vartheta} = R_{20} + R_{20} \cdot \alpha_{20} \cdot \Delta \vartheta_{20}$$

$$\Delta \vartheta_{20} = \frac{R_{\vartheta} - R_{20}}{R_{20} \cdot \alpha_{20}} = \frac{52,3 \Omega - 42 \Omega}{42 \Omega \cdot 0,0038 \frac{1}{^{\circ}\text{C}}}$$

$$\Delta \vartheta_{20} = 64,54 \text{ } ^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta \vartheta_{20} = \vartheta - 20 \text{ } ^{\circ}\text{C}$$

$$\vartheta = \Delta \vartheta_{20} + 20 \text{ } ^{\circ}\text{C} = 84,54 \text{ } ^{\circ}\text{C}$$

### 1.4 Grundgesetze im elektrischen Stromkreis

#### 1.4.1 Ohmsches Gesetz

##### Grundstromkreis und Bezugspfeile

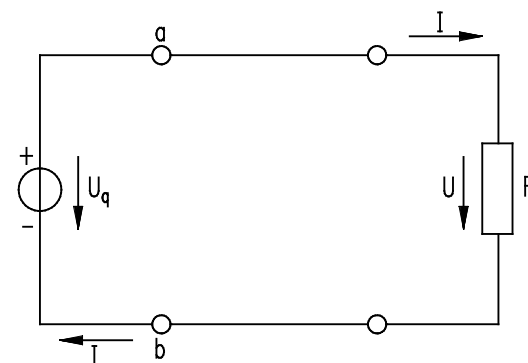


Abbildung 15 Grundstromkreis

Der **elektrische Grundstromkreis** besteht aus einer Spannungsquelle ( $U_q$ ), einem Verbraucher ( $R$ ) und den Verbindungsleitungen (Abbildung 15).

Der **Grundstromkreis** ist ein **unverzweigter Stromkreis**. Komplexere Schaltungen bestehen aus einem Netzwerk mit Reihen- und Parallelschaltungen von Bauelementen. Jede Schaltung kann jedoch durch Berechnungen auf einen Grundstromkreis mit einer Ersatzspannungsquelle und einem Ersatzverbraucher zurückgeführt werden.

Zur Berechnung der Spannungen und Ströme einer Schaltung muss den Größen eine Richtung zugeordnet werden: Dies geschieht durch die **Bezugspfeile**.

Wirkt die Größe in Richtung der Bezugspfeile, wird sie als positiv angenommen, entgegen der Bezugspfeile als negativ. Prinzipiell ist es gleichgültig, welche Zählrichtung für Strom und Spannung angenommen wird. Eine gewählte Zählrichtung muss jedoch konsequent beibehalten werden.

Um verschiedene Berechnungen der gleichen Schaltung problemlos miteinander vergleichen zu können, hat man sich international auf bestimmte Richtungen für Strom und Spannung geeinigt.

Für die Stromrichtung wurde aus historischen Gründen die technische - nach heutigem Kenntnisstand falsche - Stromrichtung gewählt, die Vereinbarung lautet (Abbildung 15):

**Im Verbraucher fließt der Strom von Plus nach Minus, im Erzeuger von Minus nach Plus.**

Für die Spannungsrichtung lautet die Vereinbarung (Abbildung 15):

**Eine Spannung wird als positiv angenommen, wenn ihr Bezugspfeil vom höheren Potenzial (Pluspol) zum niedrigeren Potenzial (Minuspole) weist.**

In Abbildung 15 erkennt man, dass im äußeren Stromkreis, d.h. an dem Verbraucher  $R$ , der Bezugspfeil der Spannung in Stromrichtung weist. Der Bezugspfeil der Quellenspannung  $U_q$  an der Spannungsquelle selbst ist der Stromrichtung von Minus nach Plus entgegengerichtet.

### Ohmsches Gesetz

Schon um 1820 wurden die Zusammenhänge zwischen Stromstärke, Spannung und Widerstand vom deutschen Physiker Georg Simon Ohm untersucht. Er führte dafür zwei sehr anschauliche Versuche durch, die hier vom prinzipiellen Ablauf noch einmal dargestellt werden.

#### Versuch 1

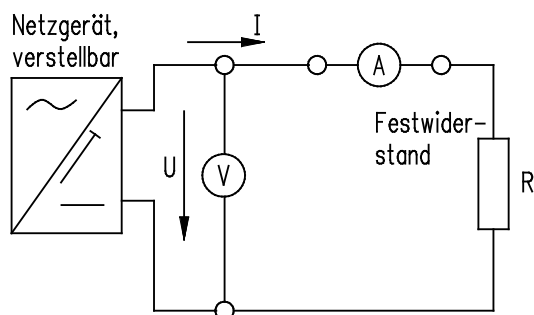


Abbildung 16 Schaltplan für Versuch 1

Ein Stromkreis besteht aus einem regelbaren Netzgerät (Spannungsquelle) und einem Festwiderstand  $R = 10 \, \Omega$ . Zur Messung der Stromstärke  $I$  bei verschiedenen Spannungen  $U$  werden zusätzlich in diesen Grundstromkreis ein Strommesser und ein Spannungsmesser, wie in Abbildung 16 dargestellt, geschaltet.

In fünf Schritten werden verschiedene Spannungen eingestellt und die dazugehörigen Stromwerte abgelesen. Die Ergebnisse dieses Versuches sind in Tabelle 2 angegeben.

U in V	I in A
0	0
3	0,3
6	0,6
9	0,9
12	1,2
15	1,5

Tabelle 2 Messergebnisse Versuch 1

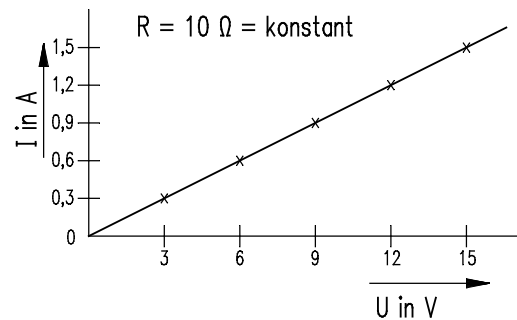


Abbildung 17 Strom-Spannungs-Diagramm

Es wird deutlich, dass die Stromstärke im gleichen Verhältnis steigt wie die Spannung, d.h.:

**Die Stromstärke  $I$  ist proportional zur Spannung  $U$ ;**

$$I \sim U$$

Diese Proportionalität zeigt sich als Gerade im Strom-Spannungs-Diagramm der Abbildung 17.

Widerstände mit diesem Verhalten werden daher auch als **lineare Widerstände** oder **ohmsche Widerstände** bezeichnet.

## Versuch 2

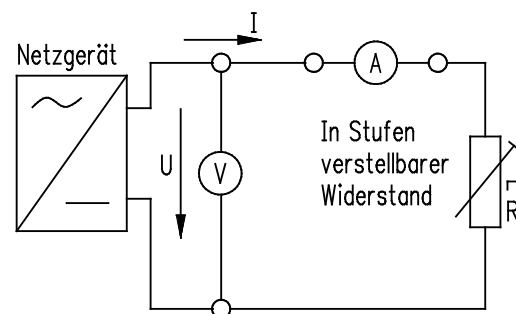


Abbildung 18 Schaltplan für Versuch 2

Für diesen Versuch wird ein Stromkreis mit einer konstanten Spannungsquelle ( $U = 10 \text{ V}$ ), einem in Stufen verstellbaren Widerstand und den beiden benötigten Messgeräten nach der Schaltung in Abbildung 18 aufgebaut.

Bei der konstanten Spannung von 10 Volt wird der Widerstand des Stromkreises in vier Schritten von  $10 \Omega$  bis  $40 \Omega$  erhöht.

Die Messergebnisse in Tabelle 3 zeigen, dass die Stromstärke bei konstanter Spannung kleiner wird, wenn der Widerstand vergrößert wird, es gilt:

**Die Stromstärke  $I$  ist umgekehrt proportional zum Widerstand  $R$ ;**

$$I \sim \frac{1}{R}$$

Stellt man die Versuchsergebnisse in einem Stromstärke-Widerstands-Diagramm dar, erhält man für diese umgekehrte Proportionalität eine Hyperbel (Siehe Abbildung 19).

R in $\Omega$	I in A
10	1
20	0,5
30	0,33
40	0,25

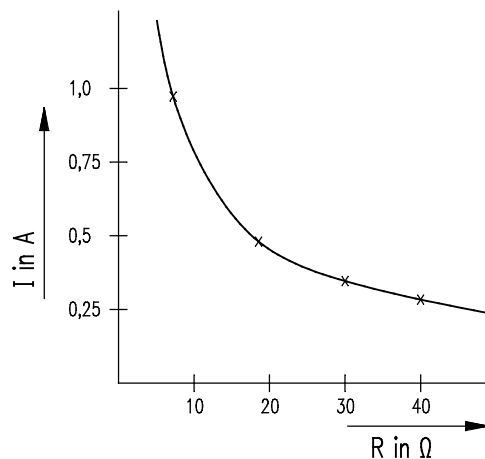


Tabelle 3 Messergebnisse Versuch 2

Abbildung 19 Strom-Widerstands-Diagramm

Die Zusammenfassung beider Versuchsergebnisse ergibt das nach seinem Entdecker benannte **Ohmsche Gesetz**:

**Die elektrische Stromstärke I ist der anliegenden Spannung U direkt proportional und dem Widerstand R umgekehrt proportional.**

$$I \sim \frac{U}{R}$$

Umformung der Gleichung nach dem Widerstand R ergibt die vielleicht bekanntere Vorschrift zur **Messung und Berechnung des Widerstandes** aus der anliegenden Spannung U und dem fließenden Strom I:

$$R = \frac{U}{I}$$

Nach dieser Gleichung ergibt sich für die Einheit des Widerstandes:  $R = \Omega = \frac{V}{A}$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Bestimmung des Widerstandswertes durch **eine Messung von Stromstärke und Spannung** nur dann für andere Spannungen gültig ist, wenn es sich um lineare Widerstände (ohmsche Widerstände) nach Abbildung 17 handelt.

Für viele Bauelemente der Elektronik, z.B. Dioden, Varistoren, Transistoren, etc., ergibt eine Messung von Strom und Spannung nur einen momentanen Widerstandswert, der nicht immer auf andere Spannungen übertragen werden kann.

Stellt man das Ohmsche Gesetz nach der Spannung um, ergibt sich

$$U = R \cdot I,$$

d.h., wird ein Widerstand von einem Strom durchflossen, so bewirkt dieser Strom einen **Spannungsfall** der Größe  $R \cdot I$  am Widerstand.

Das ohmsche Gesetz in seinen drei Darstellungen bildet die Grundlage für sämtliche Berechnungen von elektronischen Schaltungen.

### Lehrbeispiel 1

Ein Widerstand kann mit maximal 10 A belastet werden und hat einen Widerstand von 25  $\Omega$ .

*Welche höchste Spannung darf an den Widerstand angelegt werden?*

### **Lösung**

$$U = R \cdot I$$

$$U = 25 \Omega \cdot 10 \text{ A} = 250 \frac{\text{V} \cdot \text{A}}{\text{A}}$$

$$U = 250 \text{ V}$$

### Lehrbeispiel 2

Eine Wicklung aus Kupfer mit einem Querschnitt von  $A = 2,5 \text{ mm}^2$  hat einen mittleren Windungsdurchmesser von 510 mm. Bei einer Spannung von 24 V fließt ein Strom von 4,2 A durch den Draht.

*Wie viele Windungen hat die Wicklung?*

### **Lösung**

$$R = \frac{U}{I} = \frac{24 \text{ V}}{4,2 \text{ A}} = 5,71 \Omega$$

$$R = \frac{l}{\kappa \cdot A} \Rightarrow l = R \cdot \kappa \cdot A$$

$$l = 5,71 \Omega \cdot \frac{56 \text{ m}}{\Omega \text{ mm}^2} \cdot 2,5 \text{ mm}^2$$

$$l = 799,4 \text{ m}$$

$$N = \frac{l}{\pi \cdot d} = \frac{799,4 \text{ m}}{\pi \cdot 0,51 \text{ m}} = 498,9$$

$$N \approx 500 \text{ Windungen}$$



## 1.4.2 Kirchhoffsche Gesetze

### Das 1. Kirchhoffsche Gesetz (Knotenpunktsatz)

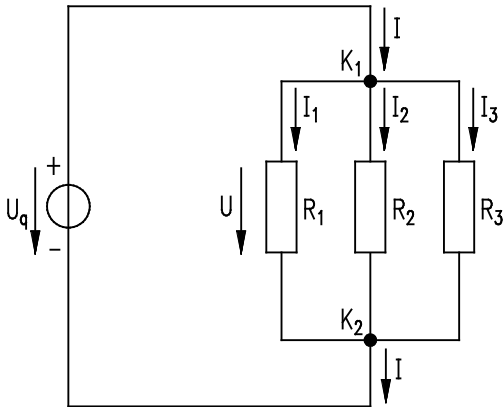


Abbildung 20 Verzweigter Stromkreis

Bei den meisten in der Elektrotechnik auftretenden Schaltungen handelt es sich nicht um Grundstromkreise, sondern um **verzweigte Stromkreise**. In Abbildung 20 ist ein einfacher, verzweigter Stromkreis mit drei parallelen Widerständen  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  dargestellt.

Im **Stromverzweigungspunkt** (Knotenpunkt)  $K_1$  teilt sich der Gesamtstrom  $I$  in drei Teilströme  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  auf. Diese drei Teilströme fließen durch die einzelnen **Stromzweige** im Knotenpunkt  $K_2$  wieder zum Gesamtstrom  $I$  zusammen.

Die gleiche Zahl von Ladungsträgern, die in den Knotenpunkt  $K_1$  zuströmt, strömt aus dem Knotenpunkt  $K_2$  wieder heraus. Es gilt daher folgender Satz:

**In einem Stromverzweigungspunkt ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.**

Anschaulich ausgedrückt besagt dieses Gesetz, dass in einem geschlossenen Stromkreis keine Ladungsträger verloren gehen.

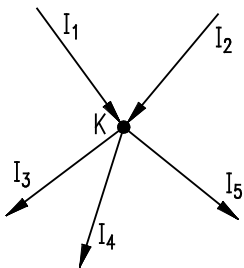


Abbildung 21 Stromverzweigungspunkt

Für den in Abbildung 20 dargestellten Stromkreis ergibt sich folgende Gleichung:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Die Kirchhoffsche Aussage gilt allgemein ohne Kenntnis des gesamten Stromkreises. In Abbildung 21 ist ein Stromverzweigungspunkt dargestellt.

Wird das 1. Kirchhoffsche Gesetz auf diesen Knotenpunkt angewandt, ergibt das:

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

Mathematisch lässt sich dies allgemein formulieren:

$$\sum_{i=1}^n (I_{zu i}) = \sum_{j=1}^m (I_{ab j})$$

Umformung der obigen Gleichung für die Schaltung in Abbildung 21 ergibt

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

Damit lässt sich eine andere Form des **1. Kirchhoffschen Gesetzes** formulieren:

**Die Summe aller vorzeichenbehafteten Ströme in einem Stromverzweigungspunkt ist gleich Null.**

$$\sum_{i=1}^n (I)_i = 0$$

Zur richtigen Anwendung dieser Aussage muss jedoch zunächst eine positive Richtung willkürlich definiert werden. In obigen Beispiel werden die in den Knotenpunkt hineinfließenden Ströme positiv gezählt, die herausfließenden negativ.

Multipliziert man das obige Beispiel mit  $-1$  ergibt sich:

$$I_3 + I_4 + I_5 - I_1 - I_2 = 0$$

Die Aussage des Kirchhoffschen Gesetzes bleibt auch hier erhalten, nur werden jetzt die abfließenden Ströme positiv gezählt, die zufließenden negativ.

## Das 2. Kirchhoffsche Gesetz (Maschensatz)

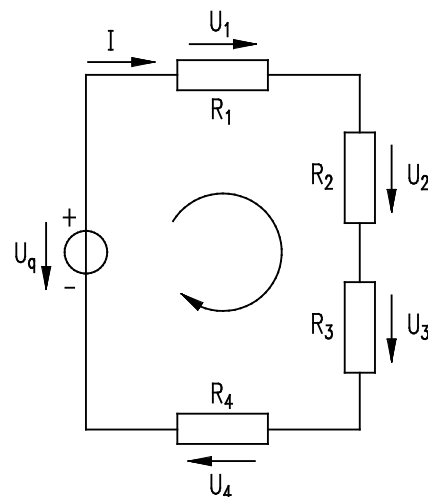


Abbildung 22 Unverzweigter Stromkreis

Ein in sich **geschlossener Umlauf** in einem Stromkreis wird als **Masche** bezeichnet. Verzweigte Stromkreise haben mehrere Maschen, der Grundstromkreis als unverzweigter Stromkreis besteht aus nur einer Masche (Abbildung 22).

Die Spannungsquelle als Ursache treibt einen Strom durch alle Widerstände des Grundstromkreises. Als Wirkung erzeugt dieser Stromfluss an jedem Widerstand einen Spannungsfall, der nach dem Ohmschen Gesetz berechnet werden kann.

Da die Summe aller Ursachen gleich der Summe aller Wirkungen ist, gilt für die in Abbildung 22 dargestellte Schaltung:

$$U_q = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 + I \cdot R_4$$

bzw.

$$U_q = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

oder allgemein:

$$\sum_{i=1}^n (U_{qi}) = \sum_{j=1}^m (U_j)$$

oder in Worten:

**Die Summe aller Quellenspannungen ist gleich der Summe der Spannungsfälle in einer Masche.**

Umstellung der obigen Formel ergibt:

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 - U_q = 0$$

Diese Gleichung ist das **2. Kirchhoffsche Gesetz**, es besagt:

**Die Summe aller vorzeichenbehafteten Spannungen in einer Masche ist gleich Null.**

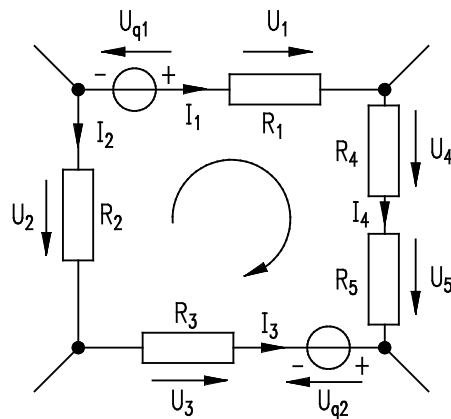
$$\sum_{i=1}^n U_i = 0$$

Für die Anwendung des Maschensatzes werden alle Spannungen (Quellenspannungen und Spannungsfälle) vorzeichenrichtig, entsprechend der Bezugspfeile im Schaltplan addiert und gleich Null gesetzt.

Der Umlaufsinn kann dabei frei gewählt werden. Es ist jedoch darauf zu achten, dass alle Spannungen, deren Richtung mit dem Umlaufsinn übereinstimmen, ein positives Vorzeichen erhalten, Spannungen, die dem Umlaufsinn entgegengerichtet sind, ein negatives Vorzeichen erhalten.

Ist in einer Masche nur eine Spannungsquelle vorhanden, wählt man im Allgemeinen als Umlaufsinn die Richtung vom höheren Potenzial (Pluspol) zum niedrigeren Potenzial (Minuspole). Sind mehrere Spannungsquellen in einer Masche, oder kann das Potenzialgefälle nicht bestimmt werden, ist der Umlaufsinn frei zu wählen.

### Lehrbeispiel 1



Stellen Sie für die in der nebenstehenden Abbildung dargestellte Masche den Maschensatz auf!

### Lösung

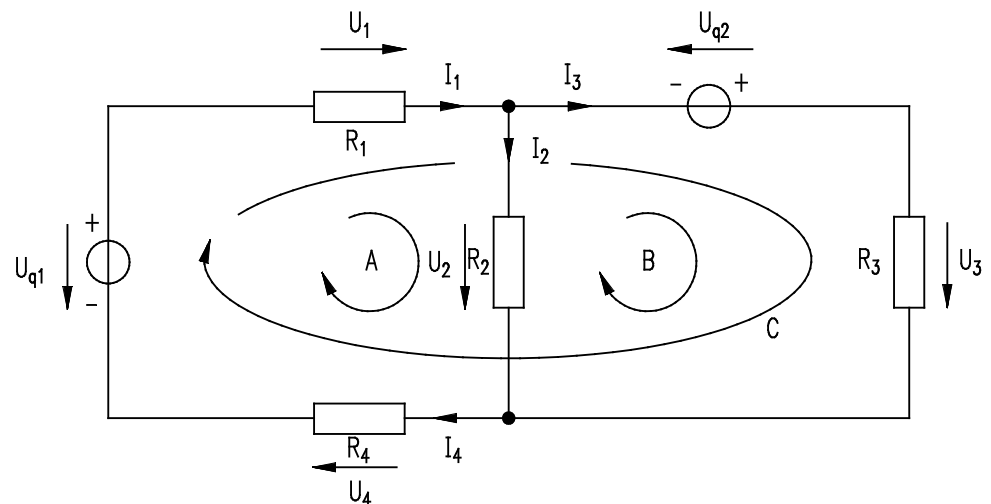
Mit dem in der Abbildung angegebenen Umlaufsinn ergibt sich:

$$U_4 + U_5 + U_{q2} - U_3 - U_2 - U_{q1} + U_1 = 0$$

oder nach Umstellung und Anwendung des Ohmschen Gesetzes:

$$I_4 \cdot R_4 + I_4 \cdot R_5 - I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 + I_1 \cdot R_1 = U_{q1} - U_{q2}$$

### Lehrbeispiel 2



Wenden Sie auf den oben dargestellten verzweigten Stromkreis die Kirchhoffschen Gesetze zur Berechnung an!

## Lösung

- 1. Kirchhoffsches Gesetz

- Knotenpunkt 1:  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$
- Knotenpunkt 2:  $I_2 + I_3 - I_4 = 0$

Addition der beiden Gleichungen ergibt:  $I_4 = I_1$

Es wird deutlich, dass auch bei einem verzweigten Stromkreis die aus einem Pol einer Spannungsquelle herausströmende Menge Ladungsträger in den anderen Pol wieder hineinströmt, es geht keine Ladung verloren.

- 2. Kirchhoffsches Gesetz

- Masche A:  $U_1 + U_2 + U_4 - U_{q1} = 0$
- Masche B:  $-U_{q2} + U_3 - U_2 = 0$

Die Addition der beiden Maschen ergibt:

$$U_1 + U_2 + U_4 - U_{q1} - U_{q2} + U_3 - U_2 = 0$$

oder

$$U_1 + U_3 + U_4 - U_{q1} - U_{q2} = 0$$

Diese Gleichung entspricht der Anwendung des 2. Kirchhoffschen Gesetzes auf die äußere Masche C.

Es wird deutlich: je häufiger ein Stromkreis verzweigt, desto mehr Knotenpunkte und in sich geschlossene Maschen lassen sich finden. Die beiden **Kirchhoffschen Gesetze** liefern Gleichungen für ein **lineares Gleichungssystem**, dessen Lösung dann die Berechnung der gewünschten Größen ermöglicht.

## 1.5 Leistung und Arbeit am Widerstand

### Elektrische Arbeit

Bei der Spannungserzeugung wird zur Ladungstrennung Arbeit verrichtet. Dadurch wird nichtelektrische Energie in elektrische Energie umgewandelt und in der Spannungsquelle gespeichert.

In einem geschlossenen Stromkreis werden unter der Kraftwirkung der elektrischen Spannung Ladungen bewegt. Dabei wird Arbeit verrichtet. Analog zur Definition der Spannung ist die Größe  $W$  der Arbeit proportional zur bewegten Ladungsmenge  $Q$  und der anliegenden Spannung  $U$ . Es gilt folgende Gleichung:

$$W = U \cdot Q$$

Für die während eines Stromflusses der Stromstärke  $I$  für die Zeitdauer  $t$  bewegte Ladungsmenge gilt  $Q = I \cdot t$ . Damit berechnet sich die elektrische Arbeit nach:

$$W = U \cdot I \cdot t$$

Als Einheit ergibt sich:  $[W] = V \cdot C = V \cdot A \cdot s = Ws$

Mit der Abkürzung „Watt“ (W) für das Produkt aus Spannung und Strom erhält die elektrische Arbeit die Einheit Ws (Wattsekunde).

Ein Vergleich der mechanischen Arbeit mit der elektrischen ergibt, dass beide Arbeitsformen die gleiche Einheit haben. Es gilt:

$$Ws = V \cdot A \cdot s, \quad \text{mit} \quad V = \frac{J}{C} = \frac{Nm}{A \cdot s} \quad \text{folgt} \quad Ws = \frac{Nm \cdot A \cdot s}{A \cdot s} = Nm = J$$

### Messung der elektrischen Arbeit

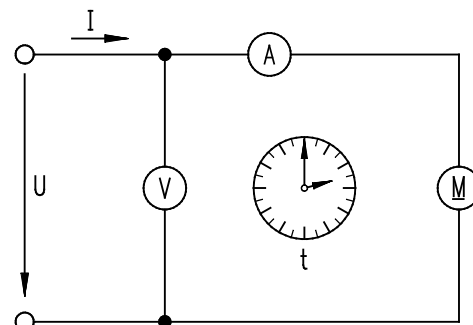


Abbildung 23 Messung der elektrischen Arbeit

Zur Bestimmung der elektrischen Arbeit muss die an einem Verbraucher anliegende Spannung, der Stromfluss und die Dauer des Stromflusses bestimmt werden. Abbildung 23 zeigt einen einfachen Messaufbau.

In der Praxis wird die Messung der elektrischen Arbeit mit **Elektrizitätszählern (Wirkarbeitszähler)** durchgeführt, wie sie in jedem Haushalt zu finden sind. Die Geräte erfassen das Produkt aus Spannung, Strom und Zeit.

Die Energieversorgungsunternehmen berechnen nach diesen Elektrizitätszählern die Stromkosten. Als Einheit nutzt man dabei die Kilowattstunde,

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws.}$$

Die Energiekosten berechnen sich zu

$$K = k \cdot W$$

mit

K : Kosten in €,  
k : durchschnittlicher Preis in €/kWh,  
W : elektrische Arbeit in kWh.

### Lehrbeispiel 1

Ein Warmwasserspeicher nimmt bei einer Spannung von 230 V einen Strom von 19 A auf.

1.1 Welche Arbeit wird von dem Gerät bei einer Betriebszeit von 3 h verrichtet?

1.2 Wie hoch sind die Energiekosten bei einem Strompreis von 0,08 €/kWh?

### Lösung

#### Lehrbeispiel 1.1

$$W = U \cdot I \cdot t = 230 \text{ V} \cdot 19 \text{ A} \cdot 10.800 \text{ s} = 47.196.000 \text{ Ws} = 13,11 \text{ kWh}$$

**Lehrbeispiel 1.2**

$$K = k \cdot W = 0,08 \text{ €/kWh} \cdot 13,11 \text{ kWh} = 1,05 \text{ €}$$

**Elektrische Leistung**

Neben der von einer elektrischen Maschine zu leistenden Arbeit ist auch die Leistung der Maschine von Interesse. Alle elektrischen Geräte werden nach der von ihr aus dem Versorgungssystem aufgenommenen und nach der von ihr in einer anderen Energieform abgegebenen Leistung beurteilt. Leistung ist ein Maß für die in einem Zeitintervall erbrachte Arbeit. Ihre Definition lautet:

**Leistung  $P$  ist die pro Zeiteinheit  $t$  verrichtete Arbeit  $W$ .**

Sie berechnet sich aus der elektrischen Arbeit nach

$$P = \frac{W}{t} = \frac{U \cdot I \cdot t}{t} = U \cdot I,$$

ihre Einheit ist Watt:  $[P] = W = V \cdot A$

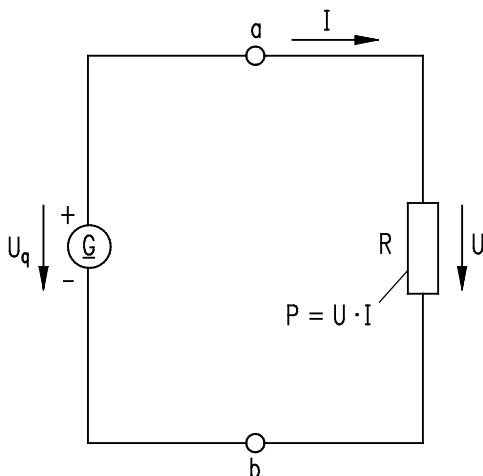
**Elektrische Leistung am Widerstand**

Abbildung 24 Energieumsetzung in einem Widerstand

An dem in der Schaltung der nebenstehenden Abbildung dargestellten Widerstand wird die von der Spannungsquelle gelieferte elektrische Energie in Wärme umgewandelt.

Setzt man die nach dem Ohmschen Gesetz gültige Beziehung für die Spannung  $U = R \cdot I$  in die obige Leistungsformel ein, ergibt sich eine Beziehung zur Leistungsberechnung bei bekanntem Widerstand und Stromstärke:

$$P = I \cdot R \cdot I = I^2 \cdot R$$

$$\text{mit } [P] = W = A \cdot \frac{V}{A} \cdot A = V \cdot A$$

Setzt man die ohmsche Beziehung  $I = \frac{U}{R}$  in die Leistungsformel ein, erhält man:

$$P = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}$$

$$\text{mit } [P] = W = \frac{V^2}{R} = \frac{V \cdot V \cdot A}{V} = V \cdot A$$

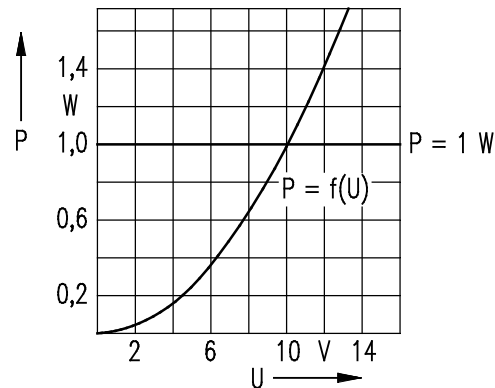


Abbildung 25 P-U-Diagramm eines Widerstandes  
100  $\Omega$ /1 W

Wenn bei einem vorgegebenen Widerstand  $R$  die Spannung verdoppelt wird, steigt die aufgenommene Leistung auf den vierfachen Wert. Dieses **quadratische Verhalten** zeigt auch das P-U-Diagramm der Abbildung 25.

Alle Bauelemente der Elektronik dürfen im Dauerbetrieb nur mit ihrer **Bemessungsleistung  $P_N$**  beansprucht werden.

Aus dem Widerstandswert und der Nennleistung lässt sich die maximal zulässige Gleichspannung berechnen:

$$P_N = \frac{U_{\max}^2}{R}$$

$$U_{\max} = \pm \sqrt{P_N \cdot R}$$

Bei dem in Abbildung 25 dargestellten Widerstand  $R = 100 \Omega$ /1 W lässt sich die Maximalspannung auch grafisch aus dem Schnittpunkt der **Leistungsparabel** mit der Geraden der Bemessungsleistung  $P_N$  ermitteln.



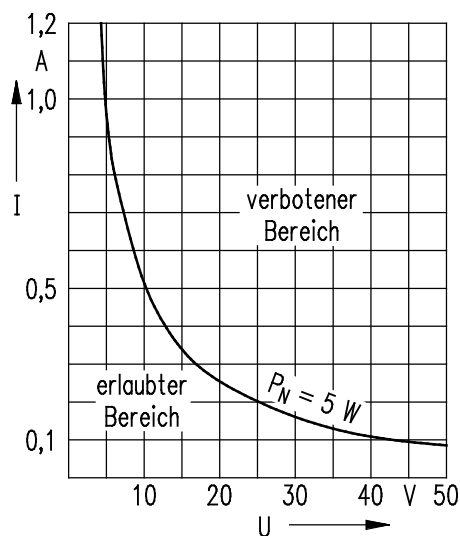


Abbildung 26 Leistungshyperbel in einem I-U-Diagramm

Für Widerstände und viele Bauelemente der Elektrotechnik ist es üblich, die Bemessungsleistung in einem I-U-Diagramm aufzutragen. Es ergeben sich **Leistungshyperbeln** nach der Beziehung:

$$I = \frac{P_N}{U}$$

Abbildung 26 zeigt eine Leistungshyperbel für eine Bemessungsleistung von  $P_N = 5 \text{ W}$ .

Die Leistungshyperbel teilt das I-U-Diagramm in einen erlaubten und einen verbotenen Bereich. Alle Arbeitspunkte, die oberhalb der Kurve im verbotenen Bereich liegen, ergeben Leistungen, die größer als die Bemessungsleistung sind ( $P > P_N$ ).

Diese Leistungen führen bei längerer Belastung zur Überhitzung bzw. zur Zerstörung des Bauelementes.

### Lehrbeispiel 2

Mit welcher maximalen Spannung darf ein Widerstand  $200 \Omega / 0,5 \text{ W}$  betrieben werden, ohne dass das Bauelement unzulässig hoch erwärmt wird und wie groß ist der Strom in diesem Fall?

### Lösung

Die maximale Spannung berechnet sich nach:

$$\begin{aligned} U_{\max} &= \pm \sqrt{P_N \cdot R} \\ &= \pm \sqrt{0,5 \text{ W} \cdot 200 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = \pm \sqrt{100 \text{ V}^2} = \pm 10 \text{ V} \end{aligned}$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\pm 10 \text{ V}}{200 \Omega} = \pm 50 \text{ mA}$$

### Lehrbeispiel 3

Für einen Ofen ist eine Heizschlange zu berechnen, die am 230-V-System eine Leistung von 3 kW aufnimmt.

Welchen Widerstand muss die Heizschlange haben?

### Lösung

$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{(230 \text{ V})^2}{3000 \text{ V} \cdot \text{A}} = 17,63 \frac{\text{V}}{\text{A}} = 17,63 \Omega$$

### Leistungsmessung

Für die Leistungsmessung werden ein Strom- und ein Spannungsmesser entsprechend Abbildung 23 in den Stromkreis geschaltet. Das Produkt aus beiden Messwerten ergibt die elektrische Leistung in Watt.

Spezielle **Leistungsmesser** zeigen die Leistung direkt an. Ein Spannungs- und ein Strommesser wirken bei diesen Geräten auf einen gemeinsamen Zeiger.

### Wirkungsgrad $\eta$ (eta)

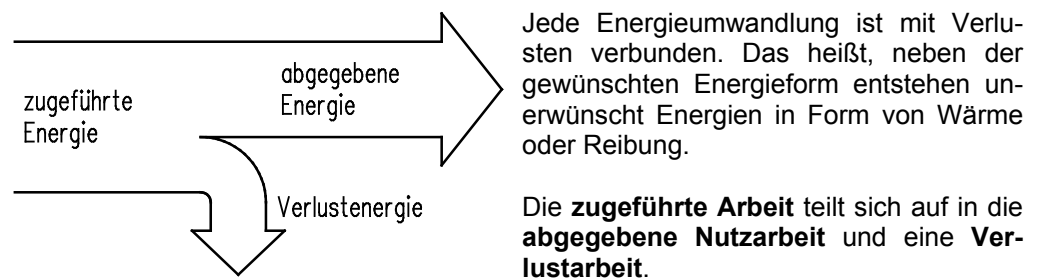


Abbildung 27 Energiefluss bei der Energieumwandlung

In Abbildung 27 sind diese Verhältnisse schematisch dargestellt und es gilt die Beziehung:

$$W_{\text{zu}} = W_{\text{ab}} + W_{\text{V}}$$

Die nutzbare Energie  $W_{\text{ab}}$  ist somit die Differenz aus zugeführter Energie  $W_{\text{zu}}$  und der Verlustenergie  $W_{\text{V}}$ .

Als Maß für die Effektivität einer Energieumformung wurde der Wirkungsgrad eingeführt. Ganz allgemein gibt der Wirkungsgrad das Verhältnis von Nutzen zum Aufwand an. Üblicherweise bildet man dafür den Quotienten aus abgegebener und zugeführter Energie.

$$\eta = \frac{W_{\text{ab}}}{W_{\text{zu}}}$$

Der Wirkungsgrad hat keine Einheit und ist bei realen Energiewandlern kleiner als eins. Häufig erfolgt die Angabe von  $\eta$  auch in Prozent.

Dividiert man Zähler und Nenner der Bestimmungsgleichung des Wirkungsgrades für die elektrische Energie durch die Zeit, ergibt sich der Wirkungsgrad für die Leistung:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

Hier berechnet sich der Wirkungsgrad als Quotient aus abgegebener und zugeführter Leistung.

Unabhängig davon, ob der Wirkungsgrad einer Maschine aus dem Quotienten der zugeführten und abgegebenen elektrischen Energie oder Leistung berechnet wird, ist er vom Betrag her gleich.

#### Lehrbeispiel 4

Auf dem Typenschild eines Elektromotors stehen folgende Bemessungsdaten:

- $U_N = 230 \text{ V}$
- $I_N = 12 \text{ A}$
- $P_N = 2,2 \text{ kW}$

*Wie groß ist die Verlustleistung und welchen Wirkungsgrad hat der Motor?*

#### **Lösung**

Abgegebene Leistung:  $P_{ab} = P_N = 2,2 \text{ kW}$

Berechnung der zugeführten Leistung:  $P_{zu} = U_N \cdot I_N = 230 \text{ V} \cdot 12 \text{ A} = 2.760 \text{ W}$

Berechnung der Verlustleistung:  $P_V = P_{zu} - P_{ab} = 2.760 \text{ W} - 2.200 \text{ W} = 560 \text{ W}$

Berechnung des Wirkungsgrades:  $\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{2.200 \text{ W}}{2.760 \text{ W}} = 0,797 = 79,7 \%$

#### **Wirkungsgrad eines elektrischen Stromkreises**

Für diese Betrachtungen wird wieder der Grundstromkreis mit einer Spannungsquelle und einem Verbraucherwiderstand  $R_a$  herangezogen. Bei allen bisherigen Aussagen wurde von einer **idealen Spannungsquelle ohne Innenwiderstand** ausgegangen.

#### **Klemmenspannung**

**Reale Spannungsquellen** besitzen jedoch einen **Innenwiderstand  $R_i$** , an dem bei Belastung der Spannungsquelle nach dem Ohmschen Gesetz ein Spannungsfall auftritt. Die bei Belastung der Quelle an den Klemmen anliegende Spannung, die **Klemmenspannung  $U_{kl}$** , ist um diesen inneren **Spannungsfall  $U_i$**  geringer, und es gilt:

$$U_{kl} = U_q - U_i = U_q - I \cdot R_i$$

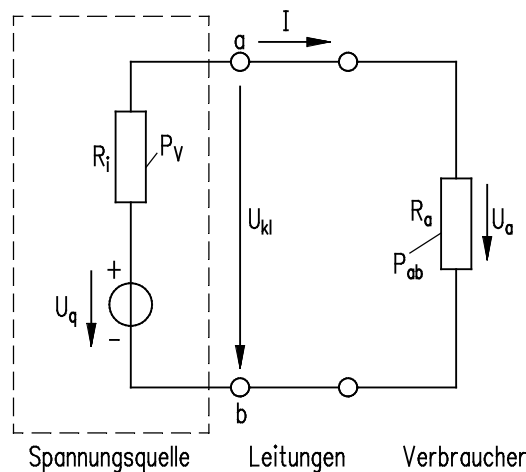


Abbildung 28 Leistungsverteilung in einem unverzweigten Grundstromkreis

**Das Ersatzschaltbild einer realen Spannungsquelle ist eine Schaltung aus einer Urspannungsquelle ohne Widerstand mit der Quellenspannung  $U_q$ , und dem in Reihe geschalteten Innenwiderstand  $R_i$ .**

Die Leitungswiderstände eines realen Stromkreises werden, falls zu berücksichtigen, in der Regel zu dem Innenwiderstand der Spannungsquelle addiert.

Die Spannungsquelle der in Abbildung 28 dargestellten Schaltung treibt den Strom  $I$  durch den Innenwiderstand  $R_i$  der Quelle und dem Verbraucherwiderstand  $R_a$  (Leitungswiderstände werden vernachlässigt). Die von der Quelle erzeugte Leistung  $P_{zu}$  teilt sich auf die beiden Widerstände auf. Am Verbraucherwiderstand wird die Nutzleistung abgegeben, am Innenwiderstand der Spannungsquelle tritt die Verlustleistung auf. Der Wirkungsgrad dieser Anordnung berechnet sich dann zu:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{ab} + P_v}$$

Unter Einbeziehung des Ohmschen Gesetzes ergibt sich aus dieser Gleichung:

$$\eta = \frac{I^2 \cdot R_a}{I^2 \cdot R_i + I^2 \cdot R_a} \Rightarrow \eta = \frac{R_a}{R_i + R_a}$$

Um große Energiemengen, wie z.B. in der **Starkstromtechnik**, mit einem **hohen Wirkungsgrad** zu übertragen, muss der Innenwiderstand des Erzeugers (Generators, evtl. Widerstand der Leitungen) möglichst klein gehalten werden.

Die Frage der maximalen Leistung spielt bei der Starkstromtechnik keine Rolle, da die Klemmenspannung wegen des geringen Innenwiderstandes des Verteilersystems nahezu konstant ist. Die Leistungsentnahme aus einem Verteilersystem wird nur durch unzulässig hohe Erwärmung des Leitungsmaterials begrenzt.

## Leistungsanpassung

Im Gegensatz zur Starkstromtechnik sind die Energiemengen in der **Kommunikationstechnik** und bei der **Datenverarbeitung** sehr gering. Es stellt sich in diesen Bereichen die Frage, wie man einer Signalquelle die **maximale Leistung** entnehmen kann.

Für den in Abbildung 28 dargestellten Stromkreis berechnet sich die gesamte umgesetzte Leistung nach:

$$P = I^2 \cdot R_g = I^2 \cdot (R_i + R_a)$$

Der maximal der Spannungsquelle zu entnehmende Strom beträgt:

$$I = \frac{U_q}{R_i + R_a}$$

Fasst man beide Gleichungen zusammen, ergibt sich für die Gesamtleistung P:

$$P = \left( \frac{U_q}{R_i + R_a} \right)^2 \cdot (R_i + R_a) = \frac{U_q^2}{R_i + R_a}$$

An Verbraucherwiderstand  $R_a$  wird davon folgende Leistung umgesetzt:

$$P_a = I^2 \cdot R_a = \frac{U_q^2 \cdot R_a}{(R_i + R_a)^2}$$

Berechnet man nun  $P_a$  mit der wie folgt definierten Größe  $k = R_a / R_i$  ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$P_a = \frac{U_q^2 \cdot k \cdot R_i}{(R_i + k \cdot R_i)^2} = \frac{U_q^2}{R_i} \cdot \frac{k}{(1+k)^2}$$

Stellt man die relative, abgegebene Leistung  $P_a/P_{amax}$  in Abhängigkeit von  $k = R_a / R_i$  als Diagramm dar, erhält man Abbildung 29.

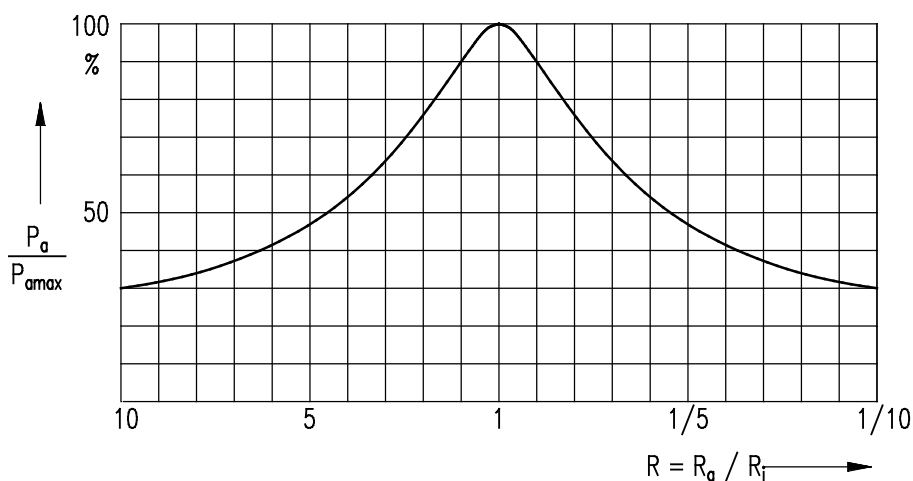


Abbildung 29 Relative abgegebene Leistung als Funktion des Widerstandsverhältnisses  $\frac{R_a}{R_i}$

Die maximale am Lastwiderstand abgegebene Leistung wird dann erreicht, wenn  $k = 1$  ist.

**Für die Leistungsanpassung, d.h. maximale abgegebene Leistung gilt:**

$$R_a = R_i$$

Die größtmögliche Leistungsabgabe ist jedoch nicht mit dem besten Wirkungsgrad verbunden. Der Spannungsfall am Innenwiderstand der Spannungsquelle ist gleich dem Spannungsfall am Nutzwiderstand, da  $R_a = R_i$ .

Der **Wirkungsgrad** berechnet sich somit bei **Leistungsanpassung** zu:

$$\eta = \frac{R_a}{R_i + R_a} = \frac{1}{1+1} = 0,5 = 50 \%$$

**Bei Leistungsanpassung ist der Wirkungsgrad der Schaltung 50 %.**

Ausgehend von der Leistungsanpassung werden noch zwei Arten der Anpassung unterschieden.

- **Stromanpassung (Unteranpassung)**

Bei der Stromanpassung ist der Lastwiderstand kleiner als der Innenwiderstand der Spannungsquelle ( $R_a < R_i$ ). Die Betriebszustände liegen zwischen dem Kurzschluss und der Leistungsanpassung. Der Wirkungsgrad  $\eta$  liegt zwischen Null (Kurzschluss) und 0,5 (Leistungsanpassung).

Bei starker Unteranpassung ( $R_a \ll R_i$ ) wird der Strom fast ausschließlich durch den Innenwiderstand der Spannungsquelle bestimmt, er ist somit praktisch last-unabhängig.

Die Stromanpassung wird daher bei Konstant-Stromquellen durchgeführt.

- **Spannungsanpassung (Überanpassung)**

Bei der Spannungsanpassung ist der Lastwiderstand größer als der Innenwiderstand des Erzeugers ( $R_a > R_i$ ). Die Wirkungsgrade der Betriebszustände liegen zwischen 0,5 (Leistungsanpassung) und 1 (Leerlauf  $I = 0$ ).

Bei starker Überanpassung ( $R_a \gg R_i$ ) wird die Klemmenspannung nahezu last-unabhängig. Man spricht dann von Konstant-Spannungsquellen.

Wie schon erwähnt, wird in den öffentlichen und industriellen Versorgungssystemen versucht, eine Spannungsanpassung zu realisieren.

### Lehrbeispiel 5

Die Batterie einer Telefonanlage hat eine Spannung von  $U = 24 \text{ V}$ , eine Ladungsmenge von  $Q = 200 \text{ Ah}$  und einen Wirkungsgrad von  $\eta_1 = 0,75$ . Ein Brückengleichrichter mit einem Wirkungsgrad  $\eta_2 = 0,8$  lädt die Batterie.

**5.1 Bestimmen Sie den Gesamtwirkungsgrad der Anlage!**

**5.2 Welche elektrische Arbeit wird dem Versorgungssystem entnommen?**

**Lösung****Lehrbeispiel 5.1**

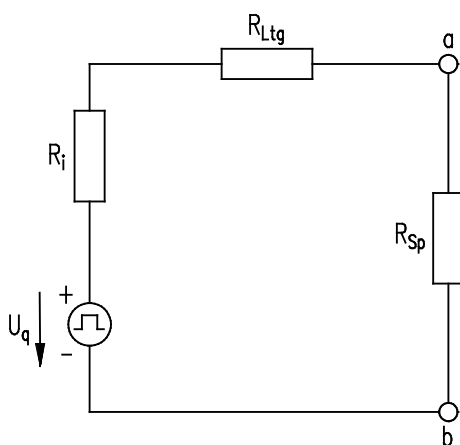
Der Gesamtwirkungsgrad berechnet sich aus dem Produkt der Einzelwirkungsgrade:

$$\eta_g = \eta_1 \cdot \eta_2 = 0,75 \cdot 0,8 = 0,6$$

**Lehrbeispiel 5.2**

Berechnung der dem Versorgungssystem entnommenen Arbeit:

$$W_{zu} = \frac{W_{ab}}{\eta_g} = \frac{Q \cdot U}{\eta_g} = \frac{200 \text{ Ah} \cdot 24 \text{ V}}{0,6} = \underline{\underline{8 \text{ kWh}}}$$

Lehrbeispiel 6

Über eine direkt geschaltete Doppelleitung aus Kupfer mit einer Länge von 10 km und einem Durchmesser von 0,8 mm wird ein Steuerimpuls übertragen. Der Impulsgeber hat die Daten:

$$U_q = +60 \text{ V}$$

$$R_i = 150 \, \Omega.$$

6.1 Berechnen Sie den ohmschen Widerstand der Steuerspule mit Berücksichtigung der Leitungswiderstände für Leistungsanpassung!

6.2 Wie groß ist die maximale Verbraucherleistung in der Spule?

## Lösung

### Lehrbeispiel 6.1

Leistungsanpassung  $R_i = R_a$

$$R_{ig} = R_i + R_{Ltg}$$

$$R_{Ltg} = \frac{l}{\kappa \cdot A} = \frac{2 \cdot 10.000 \text{ m}}{56 \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2} \cdot \pi \cdot 0,4^2 \text{ mm}^2} = 711 \Omega$$

$$R_{ig} = R_i + R_{Ltg} = (150 + 711) \Omega = 861 \Omega$$

$$R_a = R_{ig} = R_{Sp} = 861 \Omega$$

### Lehrbeispiel 6.2

$$P_{Sp} = I^2 \cdot R_{Sp} = \left( \frac{U_q}{R_g} \right)^2 \cdot R_{Sp} = \left( \frac{60 \text{ V}}{2 \cdot 861 \Omega} \right)^2 \cdot 861 \Omega$$

$$P_{Sp} = 1,05 \text{ W}$$

## 1.6 Widerstandsschaltungen

Für die Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen ergibt die Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze einfache und allgemein gültige Aussagen, die eine Berechnung von elektrischen Schaltungen ermöglichen.

### Reihenschaltung

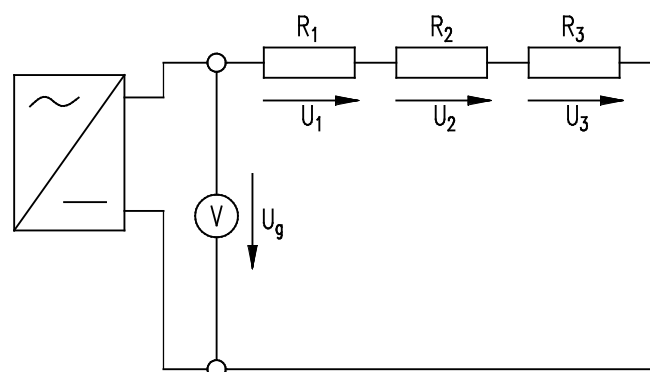


Abbildung 30 Reihenschaltung dreier Widerstände

In der in Abbildung 30 dargestellten Schaltung sind drei Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  in einem unverzweigten Stromkreis in Reihe geschaltet. Die Spannungsquelle versorgt den Stromkreis mit der Gesamtspannung  $U_g$ . Der durch alle drei Widerstände fließende gemeinsame Strom  $I$  bewirkt die Spannungsfälle  $U_1$  bis  $U_3$ .



Nach dem **2. Kirchhoffschen Gesetz** ergibt sich folgende Gleichung für die Reihenschaltung der drei Widerstände:

$$U_g = U_1 + U_2 + U_3$$

Diese Gleichung lässt sich verallgemeinern zu der Aussage:

**Bei einer Reihenschaltung ist die Summe der Spannungsfälle an den einzelnen Widerständen genauso groß wie die Gesamtspannung,**

oder als Formel

$$U_g = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum_{i=1}^n (U_i)$$

Nach dem ohmschen Gesetz lässt sich die Formel umschreiben zu

$$U_g = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \dots + I \cdot R_n$$

oder

$$U_g = I \cdot (R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

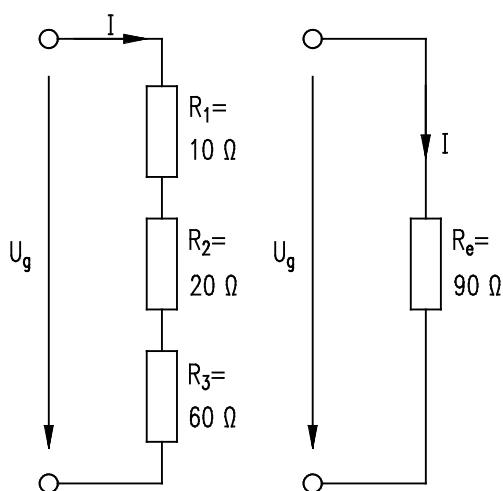
Da der Quotient aus Gesamtspannung und Gesamtstrom der Gesamtwiderstand

$$R_g = \frac{U_g}{I} \text{ ist, ergibt sich:}$$

$$R_g = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n (R_i)$$

oder:

**In einer Reihenschaltung addieren sich die Einzelwiderstände zum Gesamtwiderstand.**



Diese Aussage nutzt man zur Vereinfachung von elektronischen Schaltungen. In Reihe geschaltete Widerstände können durch einen Ersatzwiderstand  $R_e$  entsprechender Größe ersetzt werden (Abbildung 31).

Abbildung 31 Ersatzwiderstand bei Reihenschaltung

### Lehrbeispiel 1

Eine Spannungsquelle speist zwei in Reihe geschaltete Widerstände  $R_1 = 20 \, \Omega$  und  $R_2 = 40 \, \Omega$ . Die Teilspannung an Widerstand  $R_1$  beträgt 80 V.

*Berechnen Sie die Stromstärke  $I$ , den Gesamtwiderstand und die fehlenden Spannungen!*

### Lösung

Berechnung der Stromstärke  $I$ :

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{80 \, \text{V}}{20 \, \Omega} = 4 \, \text{A}$$

Berechnung des Gesamtwiderstandes:

$$R_g = R_1 + R_2 = 20 \, \Omega + 40 \, \Omega = 60 \, \Omega$$

Berechnung der Teilspannung  $U_2$ :

$$U_2 = R_2 \cdot I = 40 \, \Omega \cdot 4 \, \text{A} = 160 \, \text{V}$$

Berechnung der Gesamtspannung:

$$U_g = U_1 + U_2 = 80 \, \text{V} + 160 \, \text{V} = 240 \, \text{V}$$

### Spannungsteiler

Aus den Ergebnissen des Lehrbeispiels 1 erkennt man, dass für das Verhältnis zweier beliebiger Spannungen (Teilspannung zu Teilspannung oder Teilspannung zu Gesamtspannung) folgende Bedingungen gelten:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I \cdot R_1}{I \cdot R_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

oder

$$\frac{U_1}{U_g} = \frac{I \cdot R_1}{I \cdot R_g} = \frac{R_1}{R_g}$$

oder

$$\frac{U_2}{U_g} = \frac{I \cdot R_2}{I \cdot R_g} = \frac{R_2}{R_g}$$

Der Strom ist bei der Reihenschaltung in jedem Widerstand gleich groß und entfällt durch Kürzen. Diese Ergebnisse lassen sich verallgemeinern und ergeben die **Spannungsteilerregel**:

**In der Reihenschaltung verhalten sich die Spannungen wie die zugehörigen Widerstände, über denen die Spannungen fallen.**

Angewandt wird dies bei Spannungsteilern, die dann eingesetzt werden, wenn z.B. einem Verbraucher eine kleinere Spannung als die Betriebsspannung zuzuführen ist.

In Abbildung 32a ist ein Spannungsteiler mit Festwiderständen, in Abbildung 32b ein Spannungsteiler mit variablem Stellwiderstand (Potentiometer, Schiebewiderstand, etc.) dargestellt.

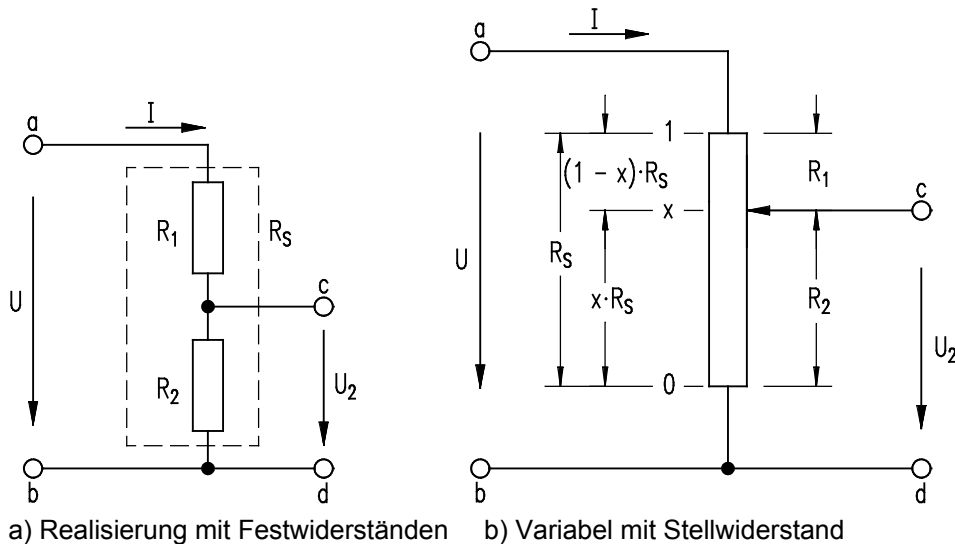


Abbildung 32 Unbelasteter Spannungsteiler

Der Spannungsteiler wird aus dem Versorgungssystem mit der Spannung  $U$  gespeist. Der Gesamtwiderstand des Spannungsteilers  $R_S$  setzt sich aus den Teilwiderständen  $R_1$  und  $R_2$  zusammen. Bei der Schaltung a (Abbildung 32) sind dies Festwiderstände, für den Stellwiderstand der Schaltung b (Abbildung 32) werden diese Widerstände mit der Variablen  $x$ , die die Stellung des Abgriffes beschreibt, nach  $R_1 = R_S \cdot (1 - x)$  und  $R_2 = R_S \cdot x$  berechnet.

Die Anwendung der Spannungsteilerregel ergibt folgende Ergebnisse für die Spannungsverhältnisse

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_S} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = x$$

bzw. für die Ausgangsspannung

$$U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_S} = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U \cdot x$$

Diese Gleichungen gelten für den **unbelasteten Spannungsteiler**, d.h. an den Klemmen c und d liegt kein Lastwiderstand an. Die Rechnungen sind auch als Näherung für den **belasteten Spannungsteiler** zulässig, wenn für den Lastwiderstand  $R_L$  gilt:  $R_L > 10 R_2$ .

### Reihenschaltung von Spannungsquellen

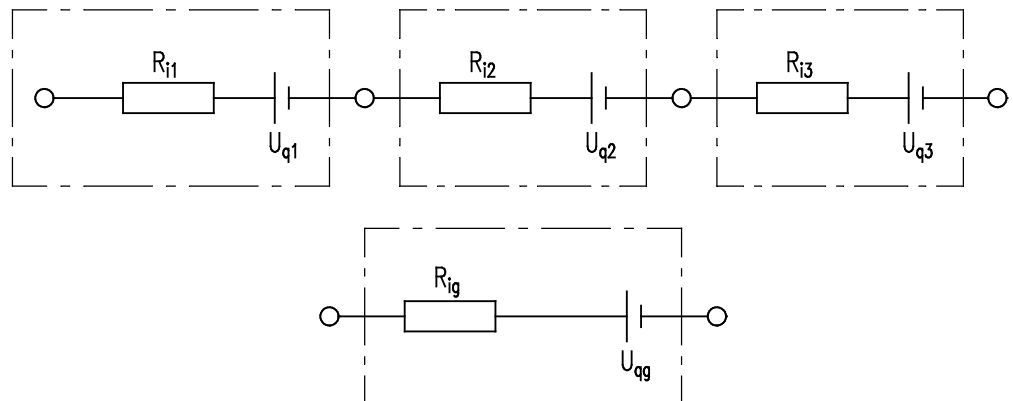


Abbildung 33 Schaltung und Ersatzschaltbild einer Reihenschaltung von Spannungsquellen

Bei vielen Anwendungen, insbesondere beim Einsatz von Batterien und Akkumulatoren, reicht die Höhe einer Quellenspannung häufig nicht aus, um die benötigte Spannung zur Verfügung zu stellen. Zur Erhöhung der Gesamtspannung werden dann mehrere Spannungsquellen hintereinander geschaltet (Abbildung 33). Die Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze führt, ohne explizite Herleitung, zu folgenden Ergebnissen:

**Die Gesamtquellenspannung (Leerlaufspannung) ist bei einer Reihenschaltung von Spannungsquellen gleich der Summe der Teilquellenspannungen.**

Es gilt:

$$U_{qg} = U_{q1} + U_{q2} + \dots + U_{qn} = \sum_{i=1}^n (U_{qi})$$

**Der Gesamtinnenwiderstand ist bei der Reihenschaltung von Spannungsquellen gleich der Summe der Teilinnenwiderstände.**

Es gilt:

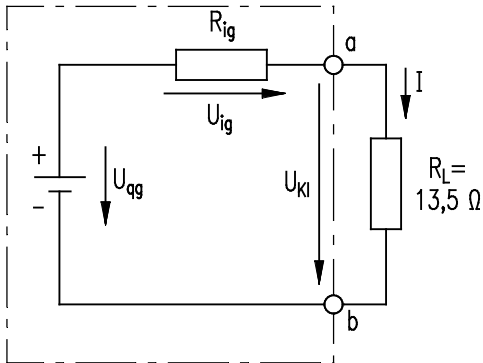
$$R_{ig} = R_{i1} + R_{i2} + \dots + R_{in} = \sum_{j=1}^n (R_{ij})$$

#### Lehrbeispiel 2

Zwei Batterien ( $U_q = 1,5 \text{ V}$ ;  $R_i = 0,4 \Omega$  und  $U_q = 4,5 \text{ V}$ ;  $R_i = 1,1 \Omega$ ) betreiben einen Verbraucher mit einem  $13,5 \Omega$  Widerstand.

2.1 Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild!

2.2 Berechnen Sie die Klemmenspannung der Ersatzstromquelle!

**Lösung****Lehrbeispiel 2.1****Lehrbeispiel 2.2**

$$U_{qg} = U_{q1} + U_{q2} = (1,5 + 4,5) \text{ V} = 6 \text{ V}$$

$$R_{ig} = R_{i1} + R_{i2} = 0,4 \, \Omega + 1,1 \, \Omega = 1,5 \, \Omega$$

Berechnung des Laststroms I:

$$I = \frac{U_{qg}}{R_{ig} + R_L} = \frac{6 \text{ V}}{1,5 \, \Omega + 13,5 \, \Omega} = 0,4 \text{ A}$$

Berechnung der Klemmenspannung:

$$U_{KL} = I \cdot R_L = 0,4 \text{ A} \cdot 13,5 \, \Omega = \underline{\underline{5,4 \text{ V}}}$$

oder

$$U_{KL} = U_{qg} - U_{ig} = U_{qg} - I \cdot R_{ig} = 6 \text{ V} - 0,4 \text{ A} \cdot 1,5 \, \Omega$$

$$U_{KL} = \underline{\underline{5,4 \text{ V}}}$$

## Parallelschaltung

Eine häufige Schaltung für mehrere Verbraucher ist die Parallelschaltung. Während bei der Reihenschaltung von Verbrauchern alle Verbraucher bei einer Unterbrechung eines Verbrauchers ausfallen, kann bei der Parallelschaltung jeder Verbraucher separat zu- oder abgeschaltet werden.

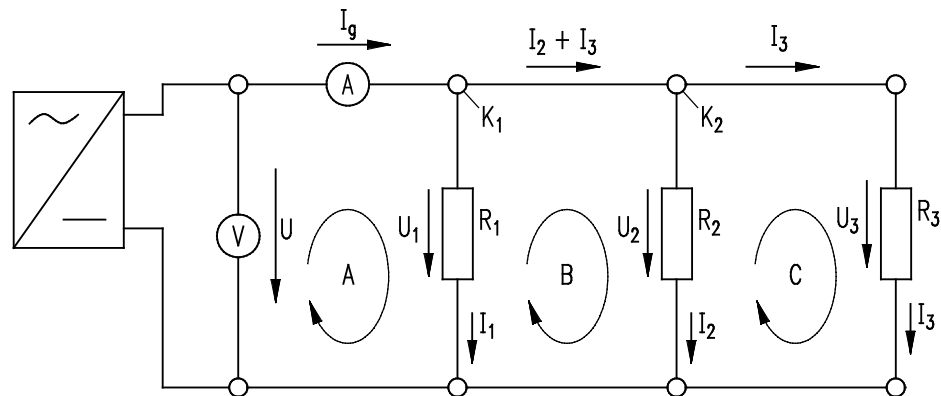


Abbildung 34 Parallelschaltung dreier Widerstände

In Abbildung 34 ist eine Parallelschaltung mit drei Widerständen dargestellt. Die Anwendung des 2. Kirchhoffschen Gesetzes auf die Maschen A, B und C ergibt für die Spannungsfälle an den drei Widerständen:

$$U = U_1 = U_2 = U_3$$

Verallgemeinert man diese Erkenntnis, kommt man zu folgender Aussage:

**In einer Parallelschaltung liegt an allen Widerständen die gleiche Spannung.**

Das 1. Kirchhoffsche Gesetz ergibt für die Knoten  $K_1$  und  $K_2$  die Gleichung

$$I_g = I_1 + I_2 + I_3,$$

oder allgemein:

**Der Gesamtstrom in einer Parallelschaltung ist gleich der Summe der Teilströme;**

$$I_g = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \sum_{i=1}^n (I_i)$$

Nach dem ohmschen Gesetz gilt für die Teilströme

$$I_1 = \frac{U}{R_1}; I_2 = \frac{U}{R_2}; \dots; I_n = \frac{U}{R_n}$$

womit man für die obige Gleichung folgende Darstellung erhält:

$$I_g \approx U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$

Führt man den Gesamtwiderstand  $R_g = \frac{U}{I_g}$  in die Gleichung ein, erhält man folgende

Berechnungsvorschrift für den Ersatzwiderstand:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{R_i} \right)$$

oder folgende Definition:

**In einer Parallelschaltung ist der Kehrwert des Gesamtwiderstandes gleich der Summe der Kehrwerte der Teilwiderstände.**

Wie bekannt, ist der Kehrwert des Widerstandes der Leitwert, sodass auch folgende Aussage gilt:

**In einer Parallelschaltung addieren sich die Teilleitwerte zum Gesamtleitwert;**

$$G_g = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \sum_{i=1}^n (G_i)$$

Betrachtet man die obigen Aussagen genauer, erhält man folgende wichtige Aussage:

**Der Gesamtwiderstand einer Parallelschaltung ist kleiner als der kleinste Einzelwiderstand.**

Die Widerstandsberechnung ist auf Grund der Kehrwerte etwas unhandlich. Für die am häufigsten gebrauchte Berechnung des Gesamtwiderstandes von zwei parallel geschalteten Widerständen gilt folgende Gleichung:

$$R_{1/2} = R_g = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Für die Herleitung dieser Beziehung wird in der allgemeinen Gleichung für die Berechnung des Gesamtwiderstandes  $n = 2$  gesetzt und nach  $R_g$  umgestellt.

Eine Parallelschaltung von Widerständen wird durch zwei Schrägstriche zwischen den Symbolen gekennzeichnet.

### Stromteiler

Für das Verzweigen eines Gesamtstromes in die Teilströme durch mehrere Widerstände nutzt man die **Stromteilerregel**. Zu deren Herleitung soll das Verhältnis beliebiger Ströme (Teilstrom zu Teilstrom, Teilstrom zu Gesamtstrom) für zwei parallel geschaltete Widerstände  $R_1 // R_2$  gebildet werden:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{U}{R_1}}{\frac{U}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{oder} \quad \frac{I_3}{I_g} = \frac{\frac{U}{R_3}}{\frac{U}{R_g}} = \frac{R_g}{R_3}$$

Die obigen Ergebnisse gelten verallgemeinert auch für mehrere Widerstände:

**In einer Parallelschaltung verhalten sich die Ströme umgekehrt wie die Widerstände, durch die die Ströme fließen.**

### Lehrbeispiel 3

Ein Widerstand von  $600 \, \Omega$  wird parallel zu einem Widerstand von  $1,6 \, \text{k}\Omega$  geschaltet.

*Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der Schaltung!*

### **Lösung**

$$R_g = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{600 \, \Omega \cdot 1600 \, \Omega}{600 \, \Omega + 1600 \, \Omega}$$

$$R_g = 436,36 \, \Omega$$

### Lehrbeispiel 4

*Für die Messbereichserweiterung eines Strommessgerätes muss ein parallel geschalteter Widerstand  $R_2$  berechnet werden. Es soll ein Gesamtstrom von  $I_g = 100 \, \text{mA}$  gemessen werden. Durch das Messgerät darf ein Strom vom  $I_1 = 2 \, \text{mA}$  fließen, der Widerstand des Messgerätes beträgt  $R_1 = 100 \, \Omega$ .*

### **Lösung**

Berechnung des Teilstromes durch den Parallelwiderstand:

$$I_2 = I_g - I_1 = 100 \, \text{mA} - 2 \, \text{mA} = 98 \, \text{mA}$$

Berechnung des Parallelwiderstandes nach der Stromteilerregel:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow R_2 = R_1 \cdot \frac{I_1}{I_2}$$

$$R_2 = 100 \, \Omega \cdot \frac{2 \, \text{mA}}{98 \, \text{mA}} = 2,04 \, \Omega$$

### **Parallelschaltung von Spannungsquellen**

Für höhere Stromstärken ist es häufig nötig, mehrere Spannungsquellen parallel zu schalten. Bei der Parallelschaltung von Spannungsquellen müssen diese die gleiche Leerlaufspannung (Quellenspannung) haben. Bei unterschiedlichen Quellenspannungen kommt es sonst auch ohne Laststromkreis zu einem unerwünschten Stromfluss zwischen den einzelnen Spannungsquellen.

Für die Gesamtquellenspannung muss daher gelten:

$$U_q = U_{qg} = U_{q1} = U_{q2} = \dots = U_{qn}$$

Der Gesamtinnenwiderstand der Parallelschaltung berechnet sich nach dem Gesetz zur Berechnung von parallel geschalteten Widerständen zu:

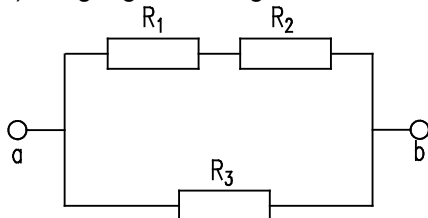
$$\frac{1}{R_{ig}} = \frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}} + \dots + \frac{1}{R_{in}}$$



**Gemischte Schaltungen**

Reine Parallel- und Reihenschaltungen von Widerständen sind nur Sonderfälle. Am häufigsten sind in der Praxis Kombinationen aus diesen beiden Schaltungselementen gegeben. Berechnet werden diese Netzwerke oder gemischte Schaltungen durch Vereinfachung einzelner Schaltungsteile nach den obigen Regeln.

a) Ausgangsschaltung



b) Vereinfachte Schaltung

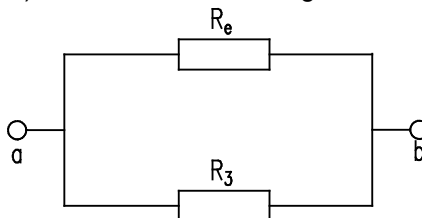


Abbildung 35 Erweiterte Reihenschaltung

Abbildung 35a zeigt eine gemischte Schaltung, bei der die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  in Reihe geschaltet sind. Parallel zu diesen beiden Widerständen liegt der Widerstand  $R_3$ .

Für die Berechnung des Gesamtwiderstandes  $R_g$  wird zunächst der Ersatzwiderstand  $R_e$  für die in Reihe geschalteten Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  berechnet:

$$R_e = R_1 + R_2$$

Nach den Regeln für die Parallelschaltung berechnet sich nun der Gesamtwiderstand der Schaltung (Abbildung 35b) nach

$$R_g = R_e // R_3 = \frac{R_e \cdot R_3}{R_e + R_3} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

**Lehrbeispiel 5**

Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der Schaltung in Abbildung 35a für die Widerstände  $R_1 = 12 \Omega$ ;  $R_2 = 18 \Omega$ ;  $R_3 = 20 \Omega$  !

**Lösung**

Berechnung des Ersatzwiderstandes:

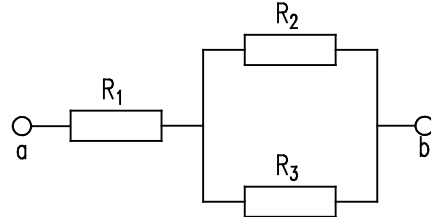
$$R_e = 12 \Omega + 18 \Omega = 30 \Omega$$

Berechnung des Gesamtwiderstandes:

$$R_g = \frac{30 \Omega \cdot 20 \Omega}{30 \Omega + 20 \Omega} = \frac{600 \Omega^2}{50 \Omega} = 12 \Omega$$

In Abbildung 36a ist eine erweiterte Parallelschaltung zu berechnen. Die parallelen Widerstände  $R_2 // R_3$  sind in Reihe geschaltet mit dem Widerstand  $R_1$ .

a) Ausgangsschaltung



b) Vereinfachte Schaltung

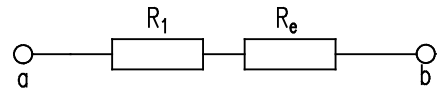


Abbildung 36 Erweiterte Parallelschaltung

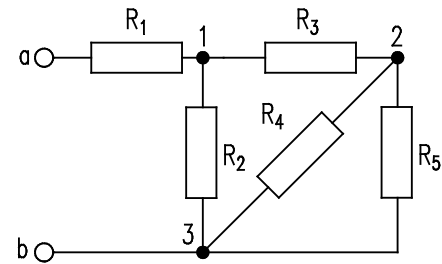
Für die Berechnung des Gesamtwiderstandes wird zunächst der Ersatzwiderstand der Parallelschaltung berechnet:

$$R_e = R_2 // R_3 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

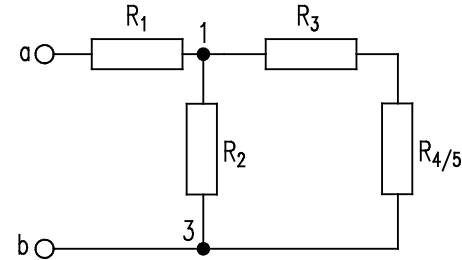
Mit dem Ersatzwiderstand (Abbildung 36b) berechnet sich der Gesamtwiderstand zu:

$$R_g = R_1 + R_e$$

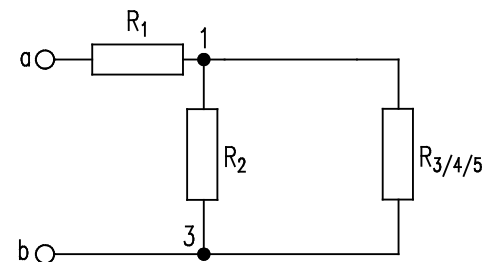
Die Berechnung der beiden obigen Schaltungen ist auch mit den beiden Kirchhoffschen Gesetzen möglich, der Rechenaufwand ist jedoch höher.

**Widerstandsnetzwerke**

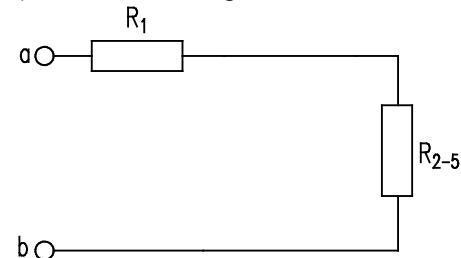
a) Ausgangsschaltung



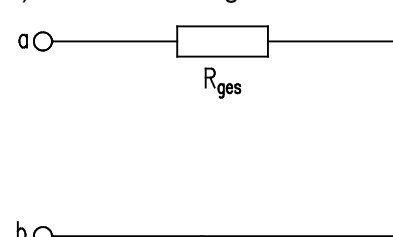
b) 1. Vereinfachung



c) 2. Vereinfachung



d) 3. Vereinfachung



e) Gesamtwiderstand

Abbildung 37 Widerstandsnetzwerk

Für das Widerstandsnetzwerk der Abbildung 37 soll der Gesamtwiderstand berechnet werden. Es ist bei derartigen Schaltungen sinnvoll, die Einzelwiderstände schrittweise nach den Gesetzen für die Reihen- und Parallelschaltung zusammenzufassen und zu vereinfachen.

1. Vereinfachung

Die Widerstände  $R_4$  und  $R_5$  sind parallel geschaltet und können durch den Ersatzwiderstand  $R_{4/5}$  ersetzt werden (Abbildung 37b).

$$R_{4/5} = R_4 // R_5 = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5}$$

2. Vereinfachung

Im zweiten Schritt wird die Reihenschaltung von  $R_{4/5}$  und  $R_3$  zusammengefasst (Abbildung 37c).

$$R_{3/4/5} = R_3 + R_{4/5}$$

3. Vereinfachung

Die Widerstände  $R_2$  und  $R_{3/4/5}$  liegen parallel und werden zum Ersatzwiderstand  $R_{2-5}$  zusammengefasst (Abbildung 37d).

$$R_{2-5} = R_2 // R_{3/4/5} = \frac{R_2 \cdot R_{3/4/5}}{R_2 + R_{3/4/5}}$$

4. Vereinfachung

Durch Addition der Reihenwiderstände  $R_1$  und  $R_{2-5}$  berechnet sich der Gesamt- oder Ersatzwiderstand der Schaltung.

$$R_g = R_{1/2/3/4/5} = R_1 + R_{2-5}$$

Mit Kenntnis des Gesamtwiderstandes des Netzwerkes kann dann für eine vorgegebene Spannung der Gesamtstrom berechnet werden.

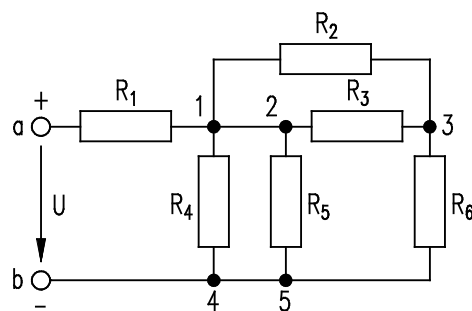
Mit den Ohmschen und Kirchhoffschen Gesetzen lassen sich dann alle Teilströme durch die einzelnen Zweige der Schaltung und alle Spannungsfälle an den einzelnen Widerständen berechnen.

### Grundregeln zur Netzwerkberechnung

Widerstandsnetzwerke lassen sich mit folgenden Grundregeln rationell und einfach berechnen:

- Zeichnung eines Ersatzschaltbildes mit eindeutigen Parallel- und Reihenschaltungen
- Nummerierung der Knoten und Eintragen der elektrischen Größen
- Vereinfachung durch Zusammenfassung und evtl. Zeichnung weiterer Ersatzschaltbilder
- Berechnung des Gesamtstromes, der Teilströme und der Teilspannungen nach dem Ohmschen Gesetz und den Kirchhoffschen Gesetzen

### Lehrbeispiel 6



Von der Widerstandsschaltung sind folgende Daten bekannt:

$$\begin{array}{ll} R_1 = 70 \, \Omega & R_4 = 90 \, \Omega \\ R_2 = 100 \, \Omega & R_5 = 90 \, \Omega \\ R_3 = 100 \, \Omega & R_6 = 40 \, \Omega \end{array}$$

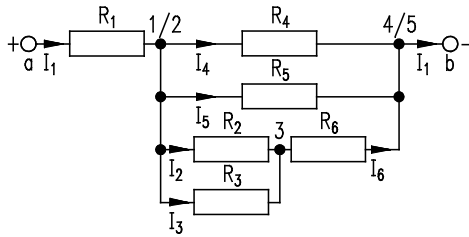
$$U = 24 \, \text{V}$$

6.1 Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der Schaltung!

6.2 Berechnen Sie alle Teilströme in den Widerständen  $R_1$  bis  $R_6$  !

## Lösung

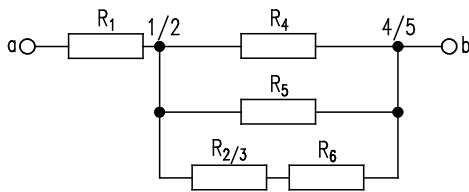
## Lehrbeispiel 6.1



Übersichtliches Ersatzschaltbild

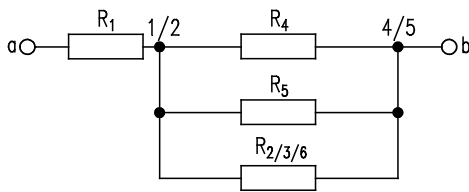
Zunächst wurde ein Ersatzschaltbild mit eindeutigen Parallel- und Reihenschaltungen gezeichnet und die Knoten sowie die gesuchten Größen eingetragen (siehe links).

Als Nächstes erfolgt die schrittweise Vereinfachung der erkennbaren Reihen und Parallelschaltungen.

1. Vereinfachung

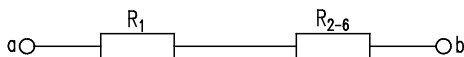
$$R_{2/3} = R_2 // R_3 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{100 \, \Omega \cdot 100 \, \Omega}{100 \, \Omega + 100 \, \Omega}$$

$$R_{2/3} = 50 \, \Omega$$

2. Vereinfachung

$$R_{2/3/6} = R_{2/3} + R_6 = 50 \, \Omega + 40 \, \Omega$$

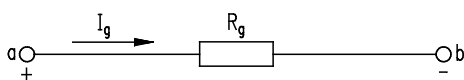
$$R_{2/3/6} = 90 \, \Omega$$

3. Vereinfachung

$$R_{2-6} = R_{2/3/6} // R_4 // R_5$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{2-6}} &= \frac{1}{R_{2/3/6}} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \\ &= \frac{1}{90 \, \Omega} + \frac{1}{90 \, \Omega} + \frac{1}{90 \, \Omega} \end{aligned}$$

$$R_{2-6} = 30 \, \Omega$$

4. Vereinfachung

$$R_g = R_{1-6} = R_1 + R_{2-6} = 70 \, \Omega + 30 \, \Omega$$

$$R_g = 100 \, \Omega$$

### Lehrbeispiel 6.2

Für die Berechnung der Teilströme wird zunächst der Gesamtstrom berechnet.

$$I_g = I_1 = I_{2-6} = \frac{U}{R_g} = \frac{24 \text{ V}}{100 \Omega} = 240 \text{ mA}$$

Da  $R_4$ ,  $R_5$  und  $R_{2/3/6}$  gleich groß und parallel geschaltet sind, werden sie von einem Drittel des Gesamtstromes durchflossen.

$$I_4 = I_5 = I_{2/3/6} = \frac{1}{3} \cdot I_g = \frac{240 \text{ mA}}{3} = 80 \text{ mA}$$

Sind die Widerstände ungleich groß, müssen die Teilströme nach der Stromteilerregel berechnet werden, z.B.:

$$\frac{I_4}{I_{2-6}} = \frac{R_{2-6}}{R_4} \Rightarrow I_4 = I_{2-6} \cdot \frac{R_{2-6}}{R_4}$$

$$I_4 = 240 \text{ mA} \cdot \frac{30 \Omega}{90 \Omega} = 80 \text{ mA}$$

Der Strom  $I_{2/3/6}$  fließt durch den Widerstand  $R_6$  und verzweigt auf die Widerstände  $R_2$  und  $R_3$  zu gleichen Teilen.

$$I_2 = I_3 = \frac{1}{2} \cdot I_6 = \frac{80 \text{ mA}}{2} = 40 \text{ mA}$$

Die Teilströme haben somit folgende Werte:

$$\begin{array}{ll} I_1 = 240 \text{ mA} & I_4 = 80 \text{ mA} \\ I_2 = 40 \text{ mA} & I_5 = 80 \text{ mA} \\ I_3 = 40 \text{ mA} & I_6 = 80 \text{ mA} \end{array}$$

Aufgabe 1

Erläutern Sie den Begriff „Elementarladung“!

Aufgabe 2

Welche Bausteine sind die Träger der Elementarladung?

Aufgabe 3

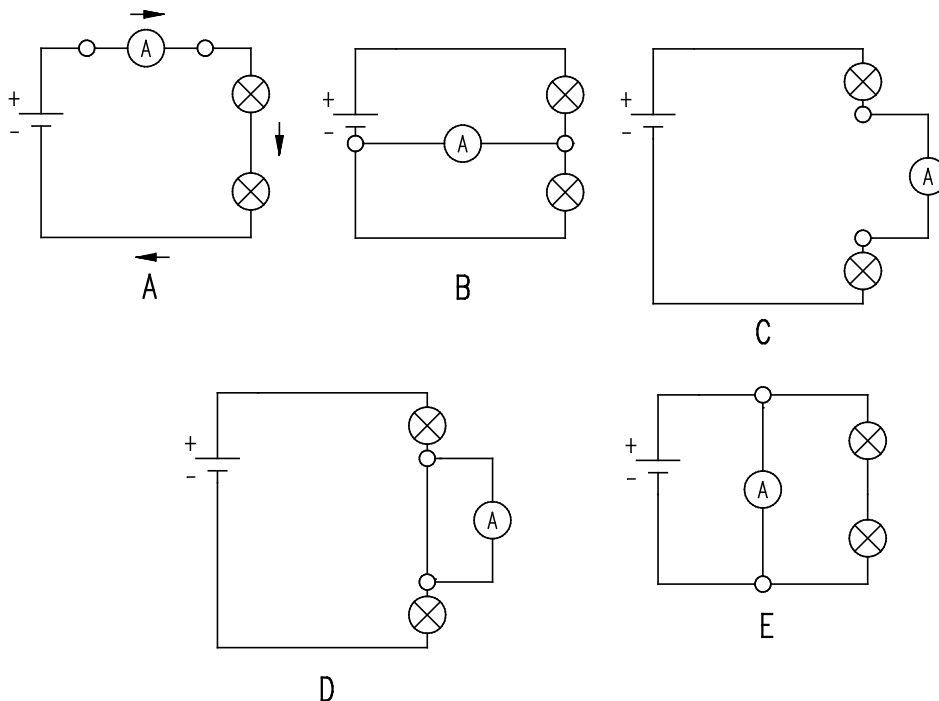
Nennen Sie die Ursache einer elektrischen Spannung!

Aufgabe 4

Nennen Sie einige wichtige Spannungsquellen!

Aufgabe 5

An welchem Pol einer Spannungsquelle herrscht Elektronenüberschuss?

Aufgabe 6

Die Stromstärke in einem Stromkreis mit zwei hintereinander geschalteten Glühlampen soll mit einem Strommesser bestimmt werden.

- 6.1 Welche der in der oben stehenden Abbildung dargestellten Anordnungen des Strommessers ist/sind richtig?
- 6.2 Welche Stromrichtung geben die in der oben stehenden Abbildung A dargestellten Bezugspfeile an?

**Aufgaben**

Aufgabe 7

Bei einem Akkumulator soll die Ladungsmenge von 4,7 Ah auf 20 Ah erhöht werden. Das Ladegerät liefert einen konstanten Ladestrom von 1,8 A.

*Berechnen Sie die Zeit, die für diese Ladungserhöhung benötigt wird!*

Aufgabe 8

*Welche Ladungsträger sind in metallischen Leitern, welche in Elektrolyten für den elektrischen Strom verantwortlich?*

Aufgabe 9

*Welche Bedingungen müssen für einen elektrischen Stromfluss erfüllt sein?*

Aufgabe 10

*Beschreiben Sie einen Mischstrom!*

Aufgabe 11

*Begründen Sie, warum für elektrische Leiter eine maximale Stromdichte angegeben wird!*

Aufgabe 12

*Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Widerstand und Leitwert!*

Aufgabe 13

*Von welchen Größen hängt der Widerstand eines Leiters ab?*

Aufgabe 14

*Nennen Sie die Eigenschaften von PTC- und NTC-Widerständen!*

Aufgabe 15

*Berechnen Sie den Widerstand einer Freileitung aus Kupfer mit  $A = 16 \text{ mm}^2$  und einer Länge von  $l = 17 \text{ km}$ !*

Aufgabe 16

Bei einer Betriebstemperatur von  $3240 \text{ °C}$  beträgt der Widerstand eines Wolframglühfadens  $487 \Omega$ .

*Berechnen Sie den Widerstand des Glühfadens im ausgeschalteten Zustand ( $20 \text{ °C}$ )!*



Aufgabe 17

Ein Heizwiderstand aus einer Metalllegierung mit einem spezifischen Widerstand von  $\rho = 1,04 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$  hat eine Länge von 12,2 m und einen Querschnitt von  $0,8 \text{ mm}^2$ .

*Berechnen Sie die Stromstärke im Heizwiderstand bei einer Spannung von 230 V!*

Aufgabe 18

Werkstoff A hat einen spezifischen Widerstand von  $\rho_A = 0,33 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$ , Werkstoff B eine spezifische Leitfähigkeit von  $\kappa_B = 3 \frac{\text{m}}{\Omega \text{ mm}^2}$ .

*Welcher Werkstoff ist der bessere elektrische Leiter?*

Aufgabe 19

*Was versteht man unter Bemessungsleistung?*

Aufgabe 20

*Wie ändert sich die Leistung an einem Bauelement, wenn die Betriebsspannung von 5 V auf 30 V erhöht wird?*

Aufgabe 21

*Erläutern Sie den Begriff Leistungsanpassung und nennen Sie ein Einsatzgebiet!*

Aufgabe 22

*Wie groß ist der Wirkungsgrad bei Leistungsanpassung?*

Aufgabe 23

*Erläutern Sie die Begriffe Stromanpassung und Spannungsanpassung!*

### Aufgabe 24

Ein Bauteil mit einer Gewichtskraft von 2,5 kN wird von einem Elektromotor (230 V,  $\eta_M = 0,8$ ) in 10 s auf eine Höhe von 10 m angehoben.

24.1 Berechnen Sie die geleistete mechanische Arbeit!

24.2 Bestimmen Sie die elektrische Leistung!

24.3 Berechnen Sie die Leistung, die ein Elektromotor aufbringen muss, wenn zusätzlich der mechanische Wirkungsgrad der Anlage  $\eta_A = 0,6$  beträgt!

24.4 Berechnen Sie die im Motor fließende Stromstärke!

24.5 Wie teuer ist ein Arbeitsgang bei einem Stromtarif von 0,04 EUR/kWh?

### Aufgabe 25

Nennen Sie das 1. Kirchhoffsche Gesetz!

### Aufgabe 26

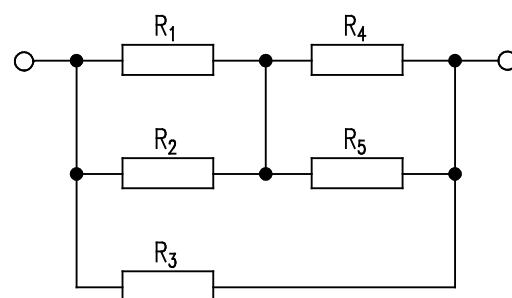
Erläutern Sie die Begriffe Leerlaufspannung, Klemmenspannung und innerer Spannungsfall bei einer Spannungsquelle!

### Aufgabe 27

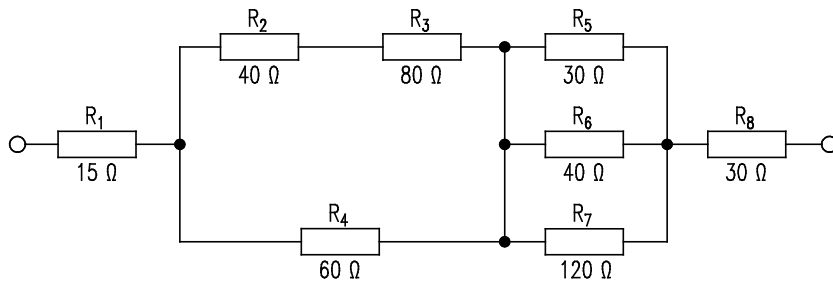
Eine Spannungsquelle hat einen Innenwiderstand von 20 m $\Omega$  und eine Quellenspannung von 5,26 V.

Berechnen Sie den maximalen Strom, mit dem die Quelle belastet werden darf, wenn die Klemmenspannung nicht unter 4,75 V absinken darf!

### Aufgabe 28



Geben Sie die einzelnen Rechenschritte für die Berechnung des Ersatzwiderstandes der oben dargestellten Schaltung an!

Aufgabe 29

Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der oben dargestellten Schaltung!

Aufgabe 30

Zwei in Reihe geschaltete Heizgeräte haben die Widerstände  $R_1 = 14 \, \Omega$  und  $R_2 = 18 \, \Omega$ . Sie werden von einem Gleichstromgenerator mit einem Innenwiderstand von  $R_i = 1,8 \, \Omega$  und einer Klemmenspannung von  $U_A = 216 \, \text{V}$  gespeist. Die Verbindungsleitung aus Kupfer hat eine einfache Länge von 18 m und einen Durchmesser von 1,5 mm.

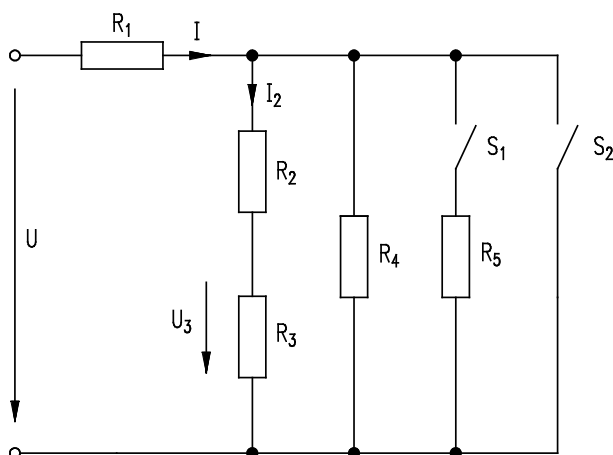
30.1 Berechnen Sie den Laststrom!

30.2 Wie groß ist die Leerlaufspannung des Generators?

30.3 Berechnen Sie den Spannungsfall auf der Leitung und an den beiden Heizwiderständen!

Aufgabe 31

Gegeben ist folgende Schaltung:



$U = 80 \, \text{V}$   
 $R_1 = 1,5 \, \text{k}\Omega$   
 $R_2 = 2,2 \, \text{k}\Omega$   
 $R_3 = 820 \, \Omega$   
 $R_4 = 1,2 \, \text{k}\Omega$   
 $R_5 = 1,2 \, \text{k}\Omega$

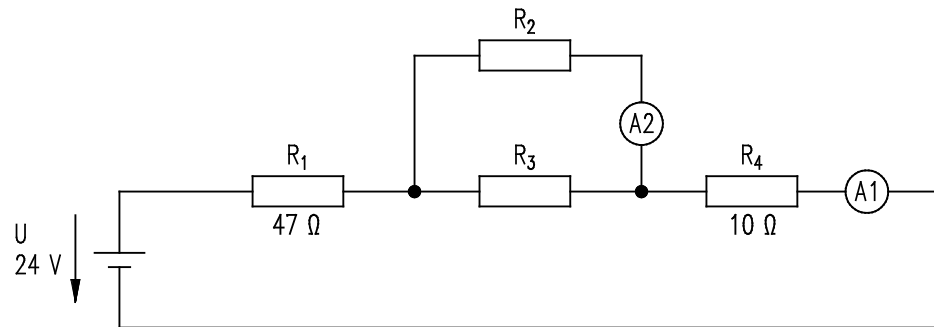
31.1 Errechnen Sie die Ströme  $I$ ,  $I_2$  und die Spannung  $U_3$  (Schalter  $S_1$  und  $S_2$  offen)!

31.2 Errechnen Sie den Strom  $I$ , wenn der Schalter  $S_2$  geschlossen ist!

31.3 Wie ändert sich der Strom  $I_2$ , wenn der Schalter  $S_1$  geschlossen und der Schalter  $S_2$  offen ist? (Keine Rechnung, sondern allgemeine Angaben wie z.B. Strom steigt, Spannung sinkt). Begründen Sie Ihre Angabe!

### Aufgabe 32

Gegeben ist folgende Schaltung:



Der Strommesser A1 zeigt eine Stromstärke von 0,27 A und der Strommesser A2 eine Stromstärke von 86 mA an.

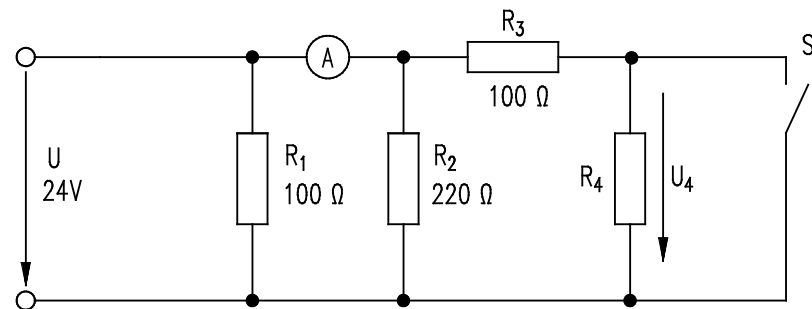
32.1 Berechnen Sie die Widerstände  $R_2$  und  $R_3$ !

32.2 Welche Leistung entnimmt der Widerstand  $R_4$  der Spannungsquelle?

32.3 Wie groß ist die Stromstärke durch den Widerstand  $R_2$ , wenn der Widerstand  $R_3$  durchbrennt (unterbricht)?

### Aufgabe 33

Gegeben ist folgende Schaltung:



Bei offenem Schalter zeigt der Strommesser 205 mA an.

33.1 Wie groß ist der Widerstand  $R_4$ ?

33.2 Wie groß ist die Gesamtstromstärke  $I$  und die Spannung  $U_4$ ?

33.3 Welche Leistung wird der Spannungsquelle bei geschlossenem Schalter entnommen?

## 2 Elektrische und magnetische Felder

### Lernbereich

### 2.1 Elektrisches Feld

Ein elektrisches Feld entsteht zwischen zwei elektrisch geladenen Körpern oder Ladungsträgern mit unterschiedlichen Ladungspotenzialen. Das elektrische Feld beschreibt den elektrischen Zustand des Raumes zwischen diesen geladenen Körpern. Die Wirkung des elektrischen Feldes lässt sich an jeder Stelle des betreffenden Raumes nachweisen. Sie nimmt mit zunehmender Entfernung von den Körpern ab.

Dieser elektrische Zustand kann homogen, das heißt an jeder Stelle gleich, oder inhomogen, das heißt an verschiedenen Stellen des Raumes unterschiedlich sein. Dies ist abhängig von der Form und Beschaffenheit der geladenen Körper. Die folgende Abbildung zeigt ein elektrisches Feld, das zeichnerisch durch so genannte Feldlinien dargestellt wird.

Ein besonderes Merkmal des elektrischen Feldes ist, dass die Feldlinien immer einen Anfang und ein Ende haben.

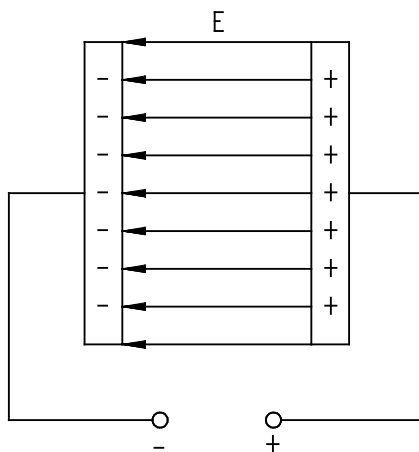


Abbildung 38 Elektrisches Feld

Anhand der Darstellung der Feldlinien wird angedeutet, ob es sich um homogene oder inhomogene Felder handelt. Homogene Felder werden immer durch Feldlinien mit gleichem Abstand gezeichnet.

In inhomogenen Feldern werden Bereiche, in denen ein schwächeres elektrisches Feld herrscht, mit weniger Feldlinien gezeichnet als die Bereiche, in denen ein stärkeres elektrisches Feld herrscht. Dabei ist die Dichte der Feldlinien kein absolutes Maß für die jeweilige Feldstärke, sondern nur eine Prinzipdarstellung.

Werden an zwei gegenüberliegenden Metallplatten, die durch einen ausreichend isolierenden Stoff voneinander getrennt sind, unterschiedliche Spannungspotenziale angelegt, entsteht zwischen den Metallplatten ein elektrisches Feld, dessen Stärke von dem Potenzialunterschied zwischen den Platten abhängig ist.

Verantwortlich für das elektrische Feld sind die unterschiedlichen Ladungen der Metallplatten, Elektronenüberschuss auf der einen Platte und Elektronenmangel auf der anderen Platte. Sind die Potenziale an den Metallplatten konstant, wird das elektrische Feld als **elektrostatisches Feld** bezeichnet.

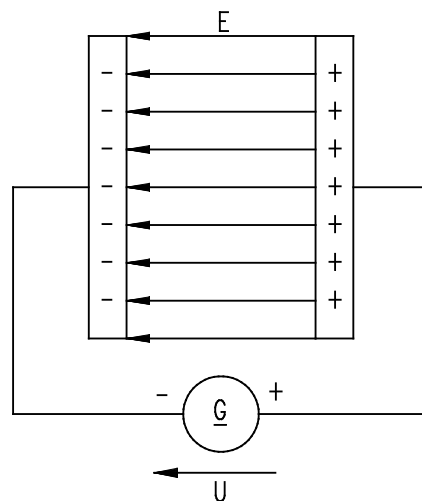


Abbildung 39 Elektrostatiches Feld zwischen zwei Metallplatten

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine solche Anordnung mit einem Gleichspannungsgenerator und daran angeschlossen zwei voneinander isolierte Metallplatten.

Das Isolationsmedium zwischen den Platten wird als Dielektrikum bezeichnet. Dieses Dielektrikum muss so gewählt werden, dass bei den auftretenden Spannungspotenzialen kein Stromfluss und keine Spannungsüberschläge entstehen können.

Der Stromkreis ist also nicht geschlossen, das heißt, in den Metallplatten bauen sich die entsprechenden positiven und negativen Spannungspotenziale auf.

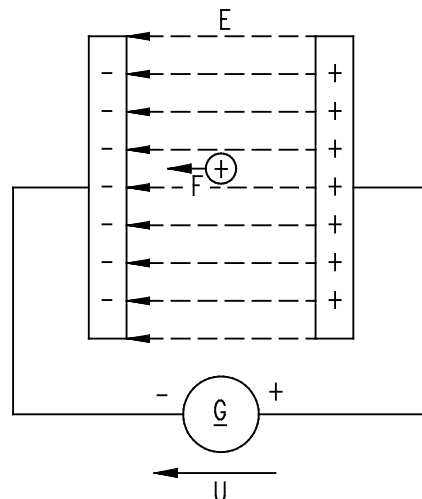


Abbildung 40 Bewegung eines geladenen Körpers in einem elektrischen Feld

Wird nun in den Raum zwischen den Platten (z.B. mit Luft als Dielektrikum) ein beweglicher, ebenfalls mit einer bestimmten Ladung versehener Körper gebracht, wird er sich in die Richtung der entgegengesetzten Polarität seiner eigenen Ladung bewegen. Das elektrische Feld ist also eine Art Kraftfeld, dessen Ursache die angelegte elektrische Spannung ist.

In einem geschlossenen Stromkreis bewirkt das elektrische Feld so die Ladungsbewegung, also den Stromfluss.

### 2.1.1 Elektrische Feldstärke und Spannung

Unterschiedliche Spannungspotenziale bzw. Ladungen sind also verantwortlich für die Entstehung eines elektrischen Feldes. Daraus ergibt sich, dass zwischen zwei voneinander isolierten Metallplatten mit konstantem Abstand bei unterschiedlichen Spannungen unterschiedlich starke elektrische Felder entstehen. Dieser Zusammenhang führt zu dem Begriff **elektrische Feldstärke E**.

Die Abbildung 41 zeigt zwischen den beiden Metallplatten mit gleichmäßig verteilter, aber unterschiedlicher Ladung ein gleichmäßiges, also homogenes, elektrisches Feld. Die oberen und unteren Ränder der Platten werden hier nicht berücksichtigt. In diesen Bereichen wird das Feld inhomogen.

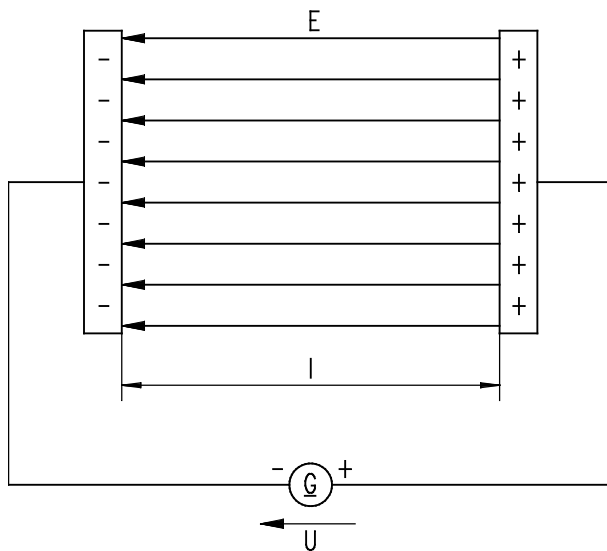


Abbildung 41 Homogenes Feld zwischen zwei Metallplatten

Das Feld wirkt also, hervorgerufen durch die Spannung U, gleichmäßig über den Plattenabstand l. Daraus lässt sich die elektrische Feldstärke E mithilfe der Formel

$$E = \frac{U}{l}$$

ermitteln. Die Feldstärke ist hier an jedem beliebigen Punkt zwischen den Platten gleich.

Die Maßeinheit für die elektrische Feldstärke ist also je nach Längenmaß:

$$\frac{\text{V}}{\text{cm}} \text{ oder } \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Die Kraft, die in einem elektrischen Feld auf eine Ladung Q wirkt, ist lediglich abhängig von der elektrischen Feldstärke E:

$$F = E \cdot Q$$

Beispiel:

An zwei Metallplatten, die in einem Abstand von 2 cm angeordnet sind, liegt eine Spannung von 12 V. Die elektrische Feldstärke zwischen den Platten beträgt damit

$$E = \frac{U}{l} = \frac{12 \text{ V}}{2 \text{ cm}} = 6 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$$

Aus diesem Zusammenhang lässt sich in einem homogenen Feld auch die Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten ermitteln, wenn die Feldstärke bekannt ist. Hierbei ist  $a$  der Abstand zwischen den Punkten.

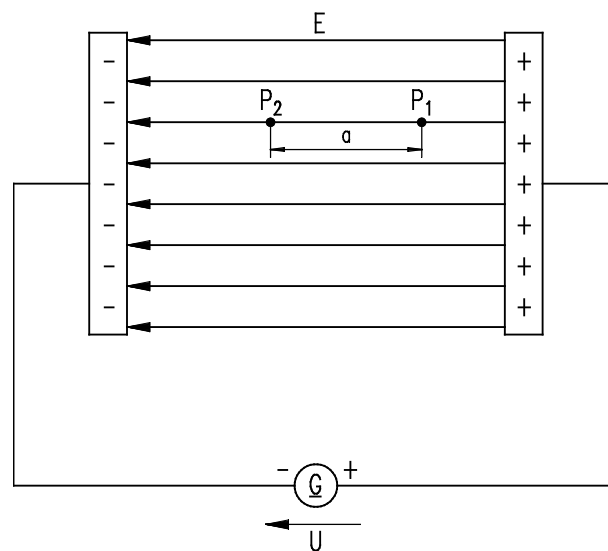


Abbildung 42 Spannung zwischen zwei Punkten im homogenen Feld

Zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  ergibt sich also die Spannung  $U_a$ :

$$U_a = E \cdot a$$

Dieses Beispiel zeigt, dass in einem homogenen elektrischen Feld zwischen einer Platte und allen Punkten mit gleichem Abstand von der Platte die gleiche Spannung liegen muss. Alle Punkte mit gleichem Abstand von der Platte haben also das gleiche Potenzial.

In der zweidimensionalen Darstellung elektrischer Felder werden diese Punkte als Linien gleichen Potenzials oder auch Äquipotenziallinien bezeichnet. Die Abbildung 43 zeigt das reale elektrische Feld, das in den Randbereichen der Platten inhomogen wird.



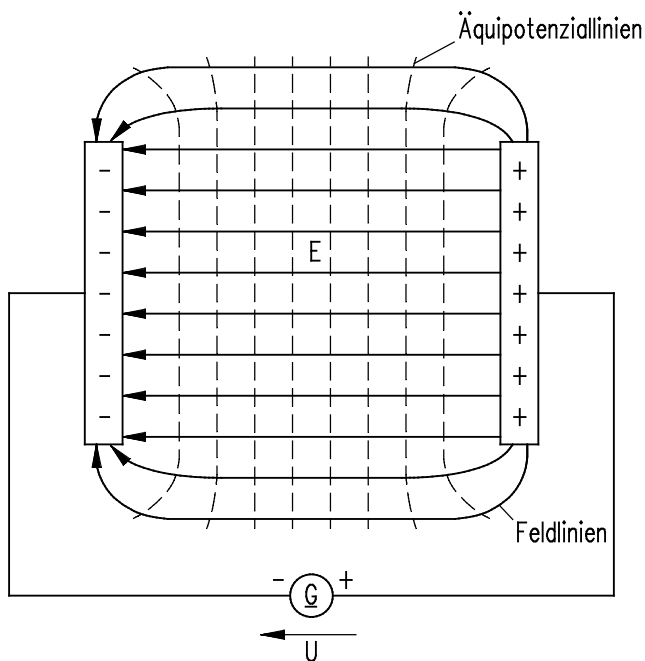
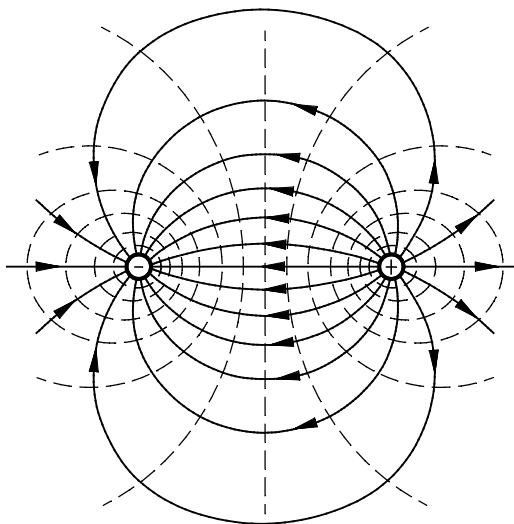


Abbildung 43 Feld- und Äquipotenziallinien in einem elektrischen Feld

Feldlinien und Äquipotenziallinien stehen immer senkrecht aufeinander. Dies ist auch in einem inhomogenen elektrischen Feld der Fall, also einem Feld, in dem die elektrische Feldstärke durch die Anordnung bzw. Form der geladenen Körper nicht überall gleich ist.

Ein einleuchtendes Beispiel für ein inhomogenes elektrisches Feld entsteht, wenn zwei zylinderförmige Leiter mit unterschiedlichen Potenzialen über eine beliebige Länge parallel geführt werden.



Die Berechnungen von Feldstärken und Spannungen in einem inhomogenen elektrischen Feld erfordern Kenntnisse der höheren Mathematik und sind in komplizierten Räumen mit beliebig geformten geladenen Körpern nur mit sehr großem Aufwand durchzuführen.

Abbildung 44 Feld- und Äquipotenziallinien in einem inhomogenen elektrischen Feld zwischen zwei zylinderförmigen Leitern

## 2.1.2 Influenz und Verschiebungsdichte

Das elektrische Feld innerhalb eines Isolators (Vakuum oder Dielektrikum, z.B. Luft) ist die Ursache für weitere Effekte. Um diese zu verdeutlichen bleiben wir bei der bisherigen Anordnung von zwei ebenen Metallplatten, zwischen denen ein homogenes elektrisches Feld erzeugt wird. Die Spannung zwischen den Metallplatten ist so bemessen, dass keine Spannungsüberschläge auftreten können.

Nun wird in dieses elektrische Feld ein Körper, wiederum bestehend aus zwei Metallplatten, eingebracht. Nach kurzer Zeit werden beide Platten getrennt voneinander wieder herausgenommen. Danach ist festzustellen, dass beide Platten unterschiedlich geladen sind.

Dieser Effekt wird **Influenz** genannt. Durch das elektrische Feld sind Ladungen in die Platten influenziert worden.

Verantwortlich dafür ist die Kraftwirkung des elektrischen Feldes auf die Ladungsträger in den Metallplatten. Die Elektronen in den beiden inneren Metallplatten werden in Richtung der positiv geladenen äußeren Metallplatte verschoben, es entsteht in der einen inneren Platte ein Elektronenüberschuss (negative Ladung) und in der anderen Platte ein Elektronenmangel (positive Ladung).

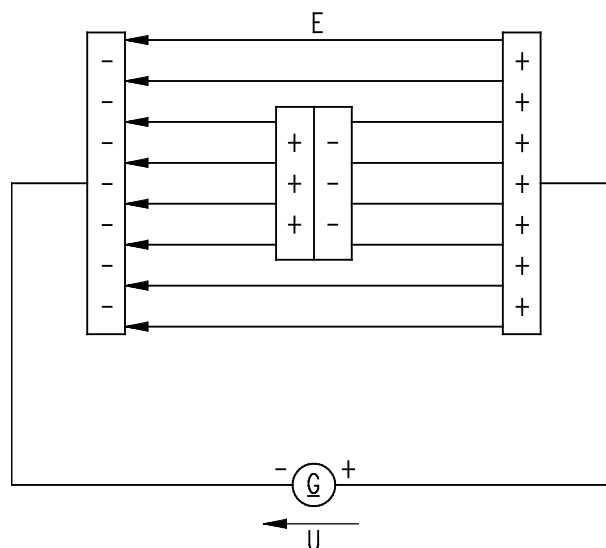


Abbildung 45 Influenz

Leider lassen sich durch die Influenz nur geringe Mengen an Ladungsträgern verschieben, sodass dieser Effekt in der praktischen Elektrotechnik heute kaum eine Rolle spielt.

Trotzdem soll hier noch ein weiterer Versuch beschrieben werden, der die Abhängigkeit der influenzierten Ladung von dem Isolationsmedium, also dem Dielektrikum zwischen den äußeren Platten zeigt.

Werden zwischen die äußeren Platten verschiedene, z.B. flüssige homogene Isolationsmedien gebracht, bleibt das homogene elektrische Feld natürlich erhalten. Da die elektrische Feldstärke lediglich von der angelegten Spannung an die äußeren Platten und vom Abstand der äußeren Platten abhängig ist, ändert sie sich dadurch nicht. Allerdings lässt sich feststellen, dass die auf den inneren Platten influenzierte Ladung von dem Isolationsmedium abhängt.

Deshalb wurde eine zweite Feldgröße eingeführt, die die verschiebbaren Ladungen in Abhängigkeit des Dielektrikums kennzeichnet. Diese Feldgröße wird **Verschiebungsdichte** genannt und wirkt genau in die gleiche Richtung wie das elektrische Feld. Die Verschiebungsdichte wird also ebenfalls mithilfe von Feldlinien gezeichnet. Die Feldlinien beginnen in der bisher betrachteten Anordnung genau wie die Feldlinien der elektrischen Feldstärke an der positiv geladenen Platte und enden an der negativ geladenen Platte. Dieses Feld wird das elektrische Verschiebungsfeld genannt.

Bei genauerer Betrachtung der Ladungen der äußeren und inneren Platten der Versuchsanordnung lässt sich allerdings feststellen, dass nicht nur die influenzierte Ladung auf den inneren Platten von dem Dielektrikum abhängig ist, sondern auch die Ladung auf den äußeren Platten mit dem Dielektrikum variiert, also ebenfalls verschoben wird. Da das elektrische Feld aber abhängig von den Ladungsmengen auf den äußeren Platten ist, ändert sich also mit dem Dielektrikum auch die elektrische Feldstärke.

Entsprechend kann als Ursache für das elektrische Verschiebungsfeld die Ladung  $Q$  an den äußeren Platten angesehen werden. Das Verschiebungsfeld ist somit unabhängig von den Materialeigenschaften des Dielektrikums. Die Verschiebungsdichte  $D$  wird also definiert als Ladungsmenge pro Fläche.

$$D = \frac{Q}{A}$$

Es wird deutlich, dass die elektrische Feldstärke von der Verschiebungsdichte und dem Dielektrikum abhängig ist.

Es lässt sich für jedes Material eine so genannte Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  (epsilon) angeben. Dabei handelt es sich um einen Proportionalitätsfaktor, mit dessen Hilfe sich die Feldstärke  $E$  bei einer bestimmten Verschiebungsdichte und einem bestimmten Dielektrikum berechnen lässt.

$$E = \frac{D}{\varepsilon}$$

Die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  setzt sich aus zwei Faktoren zusammen. Diese werden mit  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_r$  bezeichnet.  $\varepsilon_0$  ist die Dielektrizitätskonstante des Vakuums und wird auch als elektrische Feldkonstante bezeichnet.  $\varepsilon_r$  ist dann die relative Dielektrizitätskonstante des Materials, bezogen auf  $\varepsilon_0$ , sie wird auch als Permittivitätszahl bezeichnet. Die Dielektrizitätskonstante ergibt sich somit aus

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

Die dargestellten Zusammenhänge gelten nur in homogenen elektrischen Feldern mit ebenso homogenen Materialien als Dielektrikum, das heißt, die Dielektrizitätskonstante ist in dem Material an jeder Stelle gleich.

### 2.1.3 Kapazität und Kondensatoren

Als Ursache für ein elektrisches Feld zwischen zwei Platten ist der Ladungsunterschied zwischen den Platten anzusehen. Entsteht dieser Ladungsunterschied durch eine an die Platten angelegte Spannung, lässt sich für eine bestimmte Plattenanordnung ein linearer Zusammenhang zwischen Ladung  $Q$  und Spannung  $U$  ermitteln. Die entsprechende Proportionalitätskonstante in dieser Beziehung wird **Kapazität  $C$**  genannt. Es gilt:

$$Q = C \cdot U$$

Die Kapazität gibt an, um wie viel die Ladung einer solchen Plattenanordnung mit der angelegten Spannung ansteigt. Sie ist ein Maß für die Ladungsmenge  $Q$  bei einer bestimmten Spannung  $U$ , also:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Die Maßeinheit für die Kapazität lautet entsprechend der Formel:

$$\frac{As}{V} = \frac{s}{\Omega} = F \quad (\text{Farad})$$

Solche Plattenanordnungen werden in der Elektrotechnik und Elektronik in unterschiedlichen Bauformen für verschiedenste Anwendungszwecke häufig verwendet. Man bezeichnet Sie als **Kondensatoren**. Die maßgebliche Eigenschaft eines Kondensators ist die Kapazität  $C$ .

Die Kapazität eines Kondensators ist abhängig von der Ladung  $Q$ , die von den Platten aufgenommen werden kann und der zwischen den Platten entstehenden elektrischen Feldstärke. Da diese wiederum von dem Material zwischen den Platten, also dem Dielektrikum abhängt, muss bei der Ermittlung der Kapazität eines Kondensators von der Verschiebungsdichte ausgegangen werden.

Die Verschiebungsdichte berechnet sich für einen einfachen Plattenkondensator aus Ladung und Plattenfläche:

$$D = \frac{Q}{A}$$

Ebenso lässt sich die Verschiebungsdichte aus elektrischer Feldstärke  $E$  und der Dielektrizitätskonstante des Isolationsmaterials ermitteln:

$$D = \varepsilon \cdot E$$

Durch Gleichsetzen dieser Zusammenhänge und Ersetzen der elektrischen Feldstärke durch die Beziehung

$$E = \frac{U}{l}$$

ergibt sich die Gleichung

$$\frac{Q}{A} = \varepsilon \cdot \frac{U}{l},$$

die sich nach  $Q$  umstellen lässt:

$$Q = \varepsilon \cdot \frac{U \cdot A}{l}$$

Eingesetzt in die Formel für die Kapazität bleibt nach Kürzen der Spannung  $U$ :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon \cdot \frac{U \cdot A}{l}}{U} = \varepsilon \cdot \frac{A}{l}$$

Die Kapazität eines einfachen Plattenkondensators ist also lediglich abhängig von seiner Geometrie und dem Dielektrikum. Dies gilt auch für alle anderen Bauformen von Kondensatoren, allerdings ist die Berechnung der Kapazität bei beliebigen Plattenanordnungen erheblich komplexer.

Das Schaltzeichen eines Kondensators in der Elektrotechnik und Elektronik sieht folgendermaßen aus:

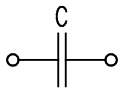
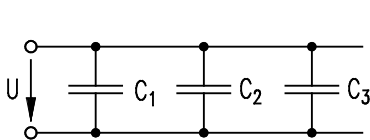


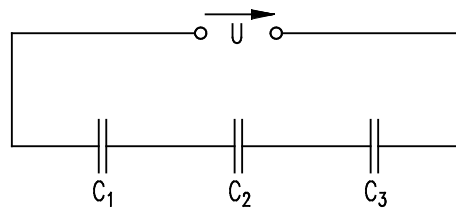
Abbildung 46 Schaltzeichen eines Kondensators

### Schaltungen von Kondensatoren

Kondensatoren sind elektrische oder elektronische Bauteile, die sich genau wie Widerstände in Parallel- oder Reihenschaltungen zusammenschalten lassen. Durch die Schaltungsart ergibt sich bei Kapazitäten eine Gesamtkapazität einer Schaltung, wie sich bei Widerständen ein Gesamtwiderstand einer Schaltung ergibt.



Parallelschaltung



Reihenschaltung

Abbildung 47 Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren

Eine Parallelschaltung von Kondensatoren bewirkt eine Vergrößerung der Plattenoberflächen und damit bei konstanter Spannung eine Vergrößerung der gespeicherten Ladungsmenge.

$$Q_g = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + \dots$$

Bei unterschiedlichen Kapazitäten der Kondensatoren aber gleicher angelegter Spannung ergibt sich die Gesamtladung zu

$$C_g \cdot U = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U + C_3 \cdot U + C_4 \cdot U + \dots$$

und die Spannung kann ausgeklammert und herausgekürzt werden.

Die Gesamtkapazität parallel geschalteter Kondensatoren lässt sich also durch Addition der Einzelkapazitäten ermitteln.

$$C_9 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \dots$$

In einer Reihenschaltung von Kondensatoren ist die Ladungsmenge in allen Kondensatoren gleich groß. Die Summe der Einzelspannungen ist gleich der angelegten Gesamtspannung, also:

$$U_9 = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots$$

Dadurch ergibt sich:

$$\frac{Q}{C_9} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \frac{Q}{C_4} + \dots$$

Der Kehrwert der Gesamtkapazität ist also gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten.

$$\frac{1}{C_9} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} + \dots$$

Die Gesamtkapazität einer Reihenschaltung von Kondensatoren ist damit kleiner als die kleinste Einzelkapazität.

## 2.1.4 Schaltvorgänge am Kondensator

Eine Kapazität C, die durch eine bestimmte Ladungsmenge Q auf eine entsprechende Spannung U aufgeladen ist, kann durch Parallelschalten eines Widerstandes entladen werden.

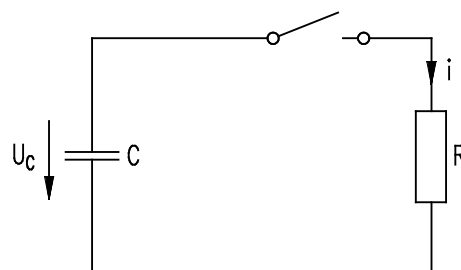


Abbildung 48 Entladen eines Kondensators mithilfe eines parallel geschalteten Widerstands

Dabei fließt im ersten Moment des Schließens des Stromkreises der maximale Strom

$$I = \frac{U}{R}$$

durch den Widerstand. Dadurch fließt aber Ladung von der positiven zur negativen Platte, es findet also ein Ladungsausgleich statt.

Mit abnehmender Ladung nimmt aber auch die Spannung U ab und der Stromfluss wird entsprechend geringer. Dieser Vorgang verläuft in Abhängigkeit der Zeit nach einem natürlichen Zusammenhang, der so genannten Exponentialfunktion  $e^x$ .

Die Ladung wird also mit zunehmender Zeit kleiner, die zugehörige Gleichung lautet:

$$Q_t = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Dabei ist  $Q_t$  die verbleibende Ladung zum Zeitpunkt t und  $Q_0$  die Anfangsladung.

Der Entladevorgang ist natürlich im Wesentlichen abhängig von der Kapazität und von dem Widerstand, über den der Entladevorgang abläuft, da dieser den Stromfluss und damit auch den Ladungsausgleich pro Zeiteinheit begrenzt.

Dies wird durch die Variable  $\tau$  (tau) in der obigen Gleichung berücksichtigt.  $\tau$  ergibt sich aus der Multiplikation der Kapazität mit dem eingesetzten Widerstand.

$$\tau = R \cdot C$$

Für die Spannung  $U_C$  am Kondensator ergibt sich analog zum Ladungsverlauf  $Q_t$  in Abhängigkeit der Zeit folgende Formel:

$$U_C = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

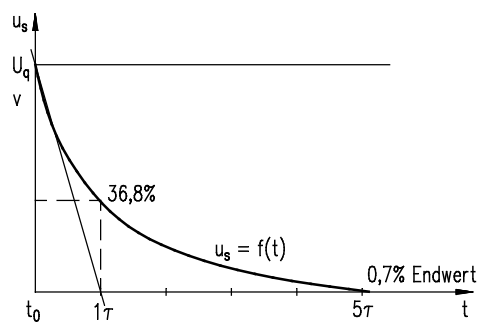


Abbildung 49 Entladekurve eines Kondensators

Die Abbildung 49 zeigt den Entladevorgang eines Kondensators über einen Widerstand.

Nach der Zeit  $\tau$  sind 63 % der Ladung des Kondensators entladen. Wie in der Abbildung gezeigt, lässt sich dieser Zeitpunkt auch bei unbekannten Kapazitäten mithilfe einer Tangente im Ursprung des Kurvenverlaufes ermitteln. Bei bekanntem Widerstand lässt sich so mithilfe von  $\tau$  die Kapazität ermitteln.

Nach  $5 \tau$  ist der Entladevorgang praktisch abgeschlossen. Die Restladung bzw. Restspannung am Kondensator beträgt weniger als 1 % der Anfangsladung bzw. Anfangsspannung.

Beim Aufladen eines nicht geladenen Kondensators über einen Widerstand fließt wieder im ersten Moment der maximale Strom, da die Ladung erst aufgebaut werden muss. Mit zunehmender Ladung im Kondensator nimmt die Spannung am Widerstand ab und der Stromfluss wird wieder geringer.

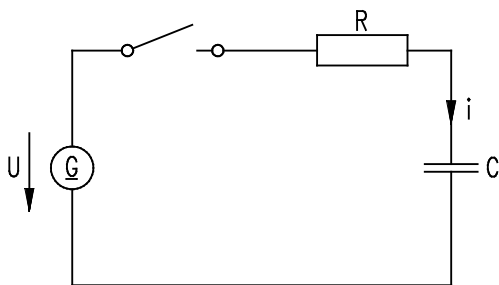


Abbildung 50 Aufladen eines Kondensators über einen Widerstand

Der Zusammenhang zwischen Ladung zu einem bestimmten Zeitpunkt und der angelegten Spannung ergibt sich wieder mithilfe der Exponentialfunktion mit  $\tau = R \cdot C$ :

$$Q_t = C \cdot U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Daraus folgt der Spannungsverlauf am Kondensator:

$$U_C = U \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Die folgende Abbildung zeigt den Ladevorgang des Kondensators. Nach einem  $\tau$  hat die Spannung am Kondensator 63 % ihres Endwertes erreicht. Nach  $5 \tau$  ist der Ladevorgang praktisch abgeschlossen.

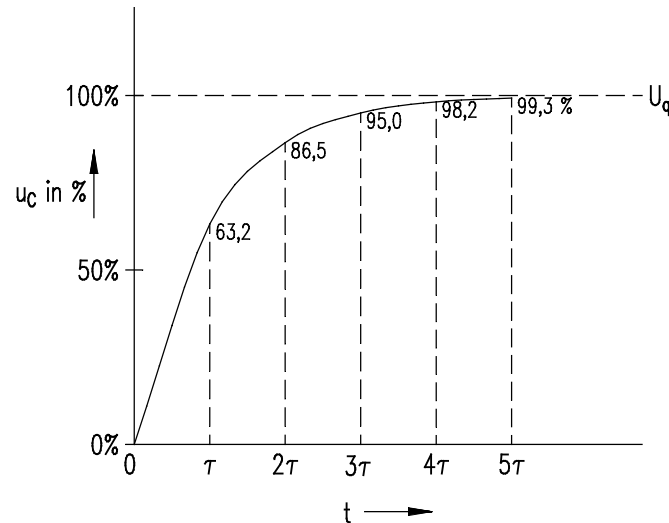


Abbildung 51 Ladevorgang eines Kondensators

## 2.2 Magnetisches Feld

Auch magnetische Felder beschreiben einen physikalischen Zustand eines Raumes. Auch hier kann das magnetische Feld homogen oder inhomogen aufgebaut sein. Die zeichnerische Darstellung eines magnetischen Feldes erfolgt genau wie die eines elektrischen Feldes.

Ein wesentlicher Unterschied eines magnetischen Feldes im Vergleich zu einem elektrischen Feld ist allerdings, dass die Feldlinien eines magnetischen Feldes immer geschlossen sind, also keinen Anfang und kein Ende haben wie elektrische Felderlinien. Die folgende Abbildung zeigt das magnetische Feld eines einfachen Dauermagneten im Vergleich zu einem elektrischen Feld zwischen zwei Metallplatten.

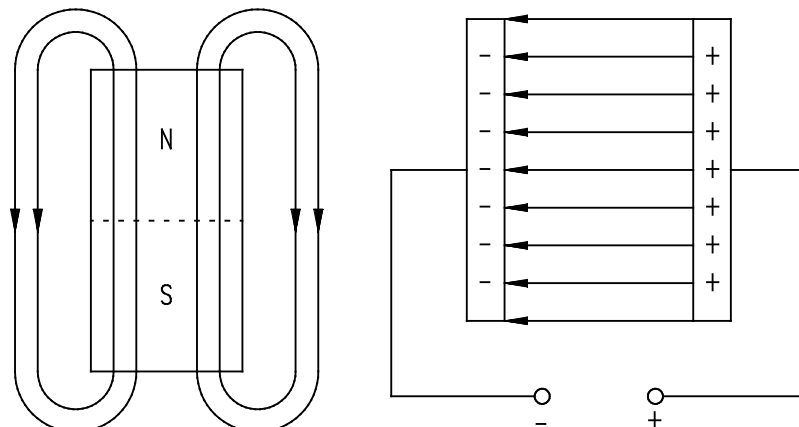


Abbildung 52 Magnetisches Feld im Vergleich zu einem elektrischen Feld



Für die Darstellung der Feldlinien von homogenen und inhomogenen magnetischen Feldern gelten die gleichen Vereinbarungen wie für die elektrischen Felder. Die Dichte der Feldlinien beschreibt die relative Stärke des magnetischen Feldes in den jeweiligen Bereichen und macht keine Aussage über die absolute Feldstärke.

Magnetische Felder, z.B. hervorgerufen durch einen Dauermagneten, scheinen zunächst in keinem direkten Zusammenhang mit elektrischen Feldern, z.B. hervorgerufen durch unterschiedliche Spannungspotenziale, zu stehen. Kommt es allerdings durch unterschiedliche Spannungspotenziale zu einem Stromfluss durch einen elektrischen Leiter, entsteht dadurch wiederum ein magnetisches Feld. So ergibt sich eine Wechselwirkung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern.

### 2.2.1 Magnetische Feldgrößen

Um die Wechselwirkung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern zu behandeln, werden hier zunächst die Feldgrößen eines magnetischen Feldes, hervorgerufen durch einen Stromfluss durch einen elektrischen Leiter, erläutert.

Wir betrachten dazu die Anordnung eines elektrischen Leiters in Form mehrerer Windungen. Eine solche Anordnung wird Spule genannt. Damit die Herleitung der magnetischen Feldgrößen nicht zu komplex wird, soll hier von einem homogenen Feld ausgegangen werden. Da die Feldlinien eines magnetischen Feldes immer geschlossen sind und keinen direkten Anfang und kein Ende haben, ergibt sich ein homogenes Feld nur dann, wenn die Spule kreisförmig aufgebaut ist. Die folgende Abbildung zeigt eine so genannte Kreisringspule, mit einer bestimmten Anzahl von Windungen.

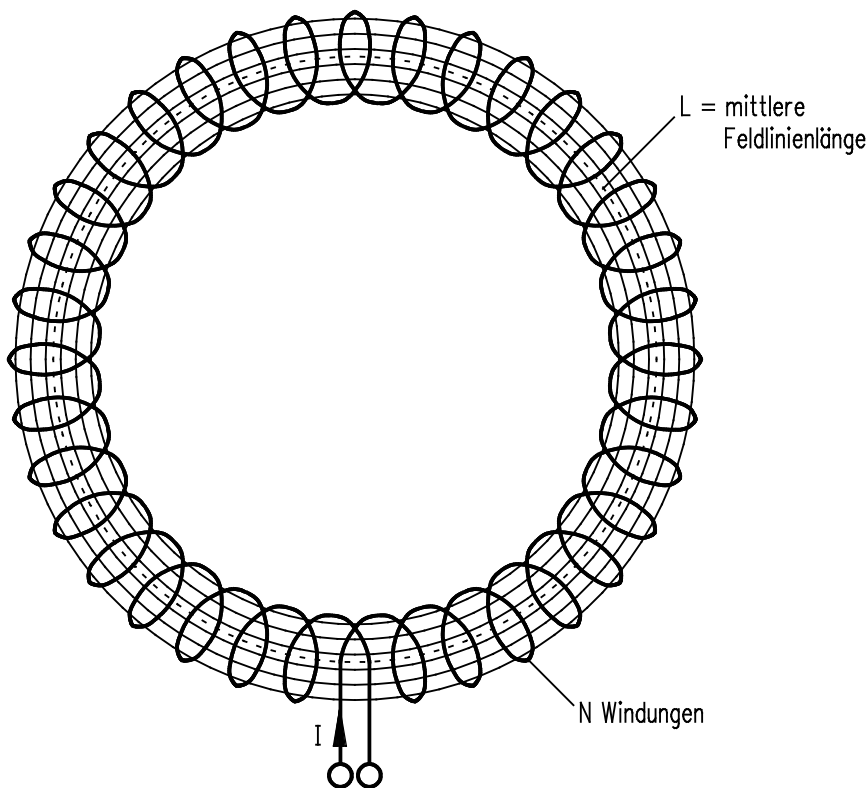


Abbildung 53 Homogenes magnetisches Feld in einer Kreisringspule

Die Stärke des magnetischen Feldes wird als magnetische Feldstärke bezeichnet. Das Formelzeichen für die magnetische Feldstärke ist  $H$ . In einem homogenen magnetischen Feld ist die magnetische Feldstärke an jedem Punkt gleich.

Ursache für das magnetische Feld und damit für die magnetische Feldstärke ist in diesem Beispiel der Stromfluss durch die Leiterwindungen. Daraus ergibt sich, dass mit einem höheren Strom  $I$  auch eine stärkere magnetische Feldstärke erreicht werden kann. In einem homogenen Feld steigt die Feldstärke mit dem Strom proportional. Weiterhin lässt sich bei konstantem Strom die Feldstärke variieren durch die Anzahl der Windungen  $N$  und durch den Umfang  $l$  der Kreisringspule.

Als Umfang wird dabei die mittlere Feldlinienlänge des magnetischen Feldes innerhalb der Spule angesehen. Mit zunehmender Anzahl an Windungen wird die Feldstärke größer, mit zunehmendem Umfang der Kreisringspule wird die Feldstärke wieder kleiner. Diese Zusammenhänge sind bei konstantem Strom durch die Leiterwindungen ebenfalls proportional.

Es ergibt sich für die magnetische Feldstärke eines homogenen magnetischen Feldes, hervorgerufen durch einen elektrischen Strom durch eine Kreisringspule, die folgende Beziehung:

$$H = \frac{N \cdot I}{l}$$

Die Einheit für die magnetische Feldstärke lautet also Ampere/Meter:

$$[H] = \frac{A}{m} \quad \text{oder} \quad [H] = \frac{A}{cm}$$

In der Praxis wird allerdings eher die Einheit Ampere/Zentimeter bevorzugt.

Eine wesentliche Erkenntnis aus diesem Zusammenhang besteht darin, dass für das magnetische Feld hier hauptsächlich Strom und Windungszahl verantwortlich sind. Das heißt, mit geringen Strömen und großen Windungszahlen lassen sich die gleichen Ergebnisse erzielen wie mit großen Strömen und geringen Windungszahlen. Daher wurde für das Produkt aus Strom und Windungszahl eine magnetische Feldgröße definiert, die als Durchflutung bezeichnet wird.

Das Formelzeichen dafür lautet  $\Theta$  (Theta).

Die magnetische Durchflutung ergibt sich also aus

$$\Theta = N \cdot I$$

Die Einheit dieser Größe ist demnach Ampere (A).

Die magnetische Feldstärke  $H$  und die Durchflutung beschreiben so das magnetische Feld ohne Berücksichtigung der besonderen Eigenschaften des Materials, das von den Feldlinien durchlaufen wird. So könnte man davon ausgehen, dass die Wirkung des magnetischen Feldes unabhängig ist von dem Material in dem es wirkt. Dies ist so nicht der Fall.

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass der Kern einer Spule, also der Bereich, der von dem homogenen Feld durchlaufen wird, aus Luft besteht. Verwendet man nun einen Eisenringkern als Durchflutungsmaterial, lässt sich eine erheblich stärkere Kraftwirkung des magnetischen Feldes feststellen. Es gibt also eine weitere Größe, die die Wirkung eines magnetischen Feldes in Abhängigkeit einer Materialkonstanten genauer beschreibt.

Es handelt sich dabei um die magnetische Flussdichte, oder auch Induktion  $B$ . Die Abhängigkeit vom durchfluteten Material wird dabei mithilfe der so genannten Permeabilität  $\mu$  (my) hergestellt. Dabei kann die magnetische Feldstärke als Ursache für das magnetische Feld angesehen werden. Die magnetische Flussdichte oder Induktion  $B$  beschreibt dann die eigentliche Kraftwirkung des magnetischen Feldes.

$$B = \mu \cdot H$$

Die Einheit für die magnetische Flussdichte lautet:

$$[B] = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \text{ T (Tesla)}$$

Die Permeabilität  $\mu$  teilt sich in zwei Anteile. Ein Anteil wird als relative Permeabilität oder Permeabilitätszahl  $\mu_r$  bezeichnet und ist ein einheitenloser Zahlenfaktor, der das Verhältnis der Permeabilität eines Stoffes zu einem Vakuum beschreibt. Die Permeabilitätszahl eines Vakuums ist also  $\mu_r = 1$ . Luft hat beinahe den gleichen Wert und kann mit  $\mu_r = 1$  angesetzt werden. Die Permeabilität des Vakuums wird dann bestimmt von der magnetischen Feldkonstante oder Induktionskonstante  $\mu_0$ . Es handelt sich dabei um eine Naturkonstante.

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9} \frac{\text{Vs}}{\text{Acm}} \quad \text{mit} \quad \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \text{ H (Henry)}$$

$$\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-8} \frac{\text{H}}{\text{cm}}$$

Die relative Permeabilität ist dann abhängig vom eingesetzten Material und gibt den Unterschied in den magnetischen Eigenschaften des Materials gegenüber einem Vakuum einheitenlos an.

Die magnetische Flussdichte oder Induktion  $B$  ergibt sich also aus den Permeabilitätszahlen und der magnetischen Feldstärke  $H$ .

$$B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot H$$

Die magnetische Flussdichte beschreibt nun die Kraftwirkung durch das magnetische Feld in jedem Punkt innerhalb des Feldes. Um die gesamte Wirkung des Feldes zu erfassen, geht nun noch die wirksame Fläche in die Beschreibung eines magnetischen Feldes ein. In einem homogenen Feld steht die wirksame Fläche senkrecht auf den Feldlinien. In diesem Fall wird die magnetische Induktion  $B$  mit der wirksamen Fläche  $A$  multipliziert und es ergibt sich der so genannte magnetische Fluss  $\Phi$  (Phi).

$$\Phi = B \cdot A$$

Je größer die wirksame Fläche, desto größer ist der magnetische Fluss und damit die Gesamtwirkung des magnetischen Feldes bei konstanter Induktion.

Der Begriff magnetischer Fluss ist dabei ein irreführender Begriff, da mit dem magnetischen Feld ja keinerlei direkter Materiefluss verbunden ist. Es handelt sich lediglich um einen physikalischen Zustand des Raumes, in dem das magnetische Feld wirkt.

Trotzdem ergibt ein Vergleich der Größen eines magnetischen Feldes mit den Größen eines Stromkreises und eines elektrischen Feldes Analogien. Ein magnetisches Feld, das ja immer geschlossen ist, wird daher auch als magnetischer Kreis bezeichnet.

Die folgende Tabelle zeigt die vergleichbaren Größen:

Elektrischer Stromkreis	Magnetischer Kreis
<b>Elektrische Spannung U</b> $U = I \cdot R$	<b>Magnetische Durchflutung <math>\Theta</math></b> $\Theta = I \cdot N$
<b>Elektrischer Strom I</b> $I = S \cdot A$ , S = Stromdichte	<b>Magnetischer Fluss <math>\Phi</math></b> $\Phi = B \cdot A$
<b>Verschiebungsdichte D</b> $D = \varepsilon \cdot E$	<b>Flussdichte oder Induktion B</b> $B = \mu \cdot H$
<b>Elektrische Feldstärke E</b> $E = \frac{U}{l}$	<b>Magnetische Feldstärke H</b> $H = \frac{\Theta}{l}$
<b>Dielektrizitätskonstante <math>\varepsilon</math></b> $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$	<b>Permeabilität <math>\mu</math></b> $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$

Tabelle 4 Vergleich Elektrischer Stromkreis/Magnetischer Kreis

### 2.2.2 Krafteinwirkung auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld

Ein stromdurchflossener Leiter, angeordnet zu einer Spule, erzeugt ein magnetisches Feld durch seine Windungen. Werden diese Windungen abgewickelt und der Leiter gerade angeordnet, entsteht ebenfalls ein magnetisches Feld, das diesen Leiter umschließt. Das folgende Bild zeigt einen solchen Leiter im Querschnitt, mit den so entstehenden Feldlinien.

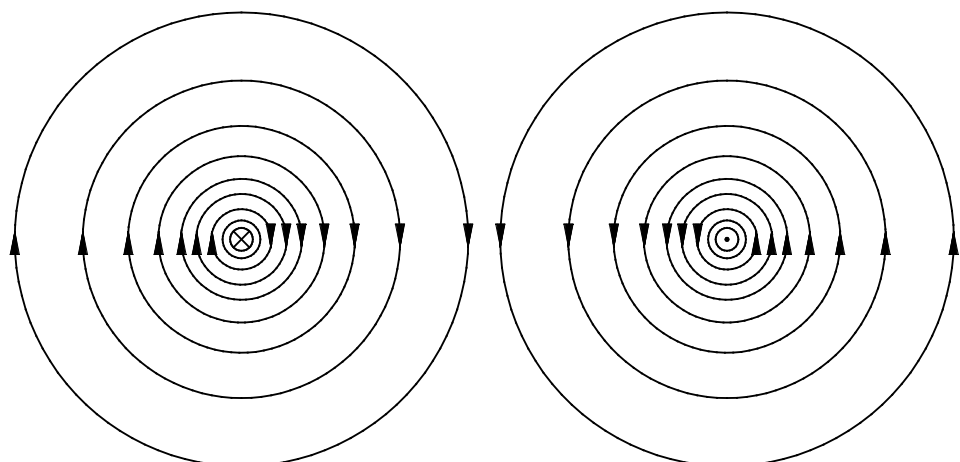


Abbildung 54 Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters

Das Kreuz bzw. der Punkt im Querschnitt des Leiters deutet die Richtung des Stromflusses an. Die Richtung des Stromflusses bestimmt auch die Richtung der Wirkung des magnetischen Feldes. Fließt der Strom in die Darstellung hinein (dargestellt durch das Kreuz), wirkt das magnetische Feld im Uhrzeigersinn, fließt der Strom aus der Darstellung heraus (dargestellt durch den Punkt im Leiter), wirkt das magnetische Feld gegen den Uhrzeigersinn.

Wird ein solcher stromdurchflossener Leiter in das Magnetfeld eines Dauermagneten gebracht, wirkt das Magnetfeld des Leiters an den Stellen verstärkend auf das gesamte magnetische Feld, wo die Feldlinien in die gleiche Richtung zeigen. Dort, wo die Feldlinien in unterschiedliche Richtungen zeigen, wird das magnetische Gesamtfeld geschwächt.

Die Stärkung des Magnetfeldes auf der einen Seite und die Schwächung des Magnetfeldes auf der anderen Seite üben eine Kraft auf den Leiter aus, die den Leiter vom stärkeren Teil des Magnetfeldes wegdrückt und zum schwächeren Teil des Magnetfeldes hinzieht. Der Leiter bewegt sich innerhalb des Magnetfeldes.

Die folgende Abbildung zeigt dieses Verhalten.

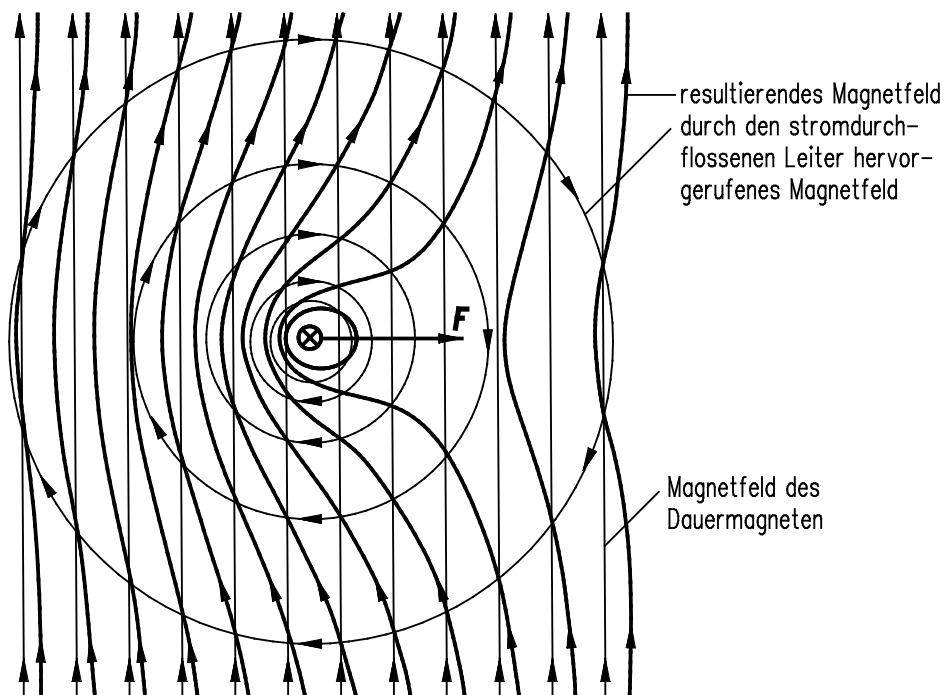


Abbildung 55 Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter in einem Magnetfeld

Aus der Richtung des Stromflusses und der Richtung des Magnetfeldes des Dauermagneten lassen sich die Bereiche des verstärkten und des abgeschwächten Magnetfeldes und damit auch die Richtung der Kraftwirkung ermitteln.

Wird der Stromfluss durch den Leiter erhöht, ergibt sich ein stärkeres magnetisches Feld um den Leiter und die Kraftwirkung auf den Leiter im Magnetfeld des Dauermagneten wird stärker. Ebenso wirkt sich die wirksame Länge des Leiters in dem Magnetfeld und die Flussdichte auf die Kraft, die auf den Leiter wirkt, aus. Der entsprechende Zusammenhang stellt sich folgendermaßen dar:

$$F = I \cdot B \cdot l$$

Ein beweglich gelagerter Leiter würde sich durch diese Kraft in die beschriebene Richtung bewegen.

Wird nun statt eines Leiters eine drehbar gelagerte Leiterschleife in das Magnetfeld eines Dauermagneten gebracht, bewegt sich der obere Teil der Leiterschleife in Abhängigkeit der Richtung des Stromflusses in die eine Richtung und der untere Teil der Leiterschleife auf Grund der umgekehrten Stromrichtung in die andere Richtung. Die Leiterschleife vollzieht eine Drehung.

Die folgende Abbildung zeigt dieses Prinzip.

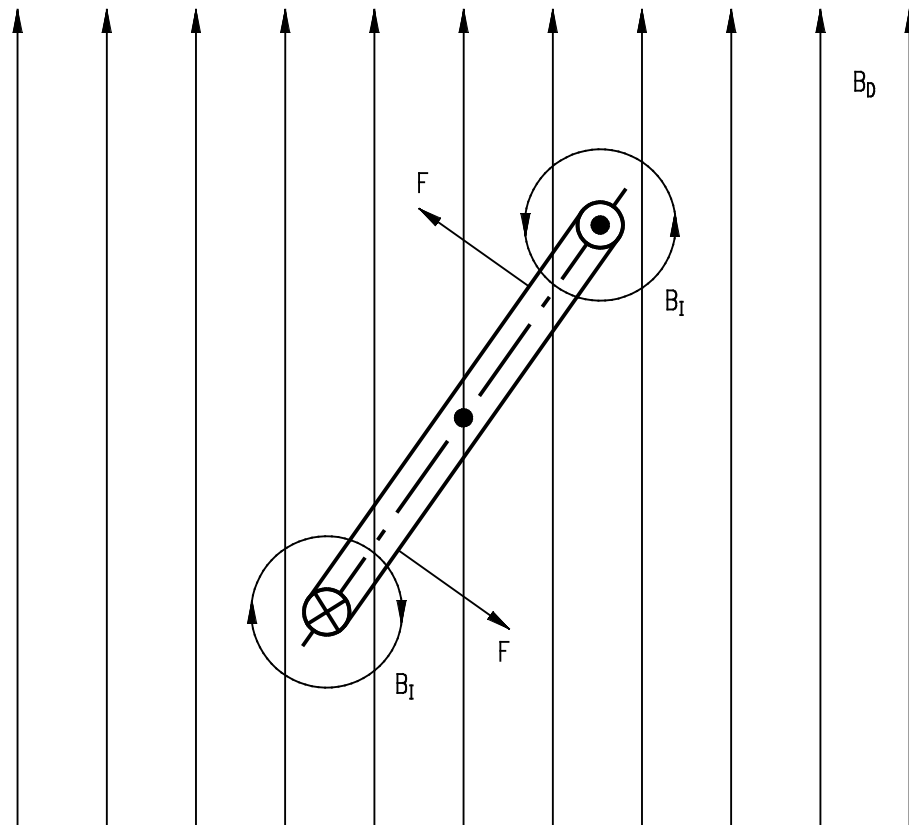


Abbildung 56 Drehung einer stromdurchflossenen Leiterschleife in einem Magnetfeld

Bei einfachen elektrischen Gleichstrommotoren werden mehrere versetzte Lagen von Leiterschleifen in dem Magnetfeld eines Dauermagneten oder eines Elektromagneten ständig umgepolt, um so eine kontinuierliche Drehung der Motorwelle zu erreichen.

### 2.2.3 Elektromagnetische Induktion

Geht man von einer drehbar gelagerten Leiterschleife in einem homogenen magnetischen Feld mit konstanter Flussdichte aus und misst die Spannung zwischen den beiden Enden der Leiterschleife, so stellt man fest, dass die Spannung gleich Null ist, solange sich die Leiterschleife in einer Ruhelage befindet.

Sobald die Leiterschleife von außen bewegt wird, zeigt das Spannungsmessgerät eine sich ändernde Spannung an.

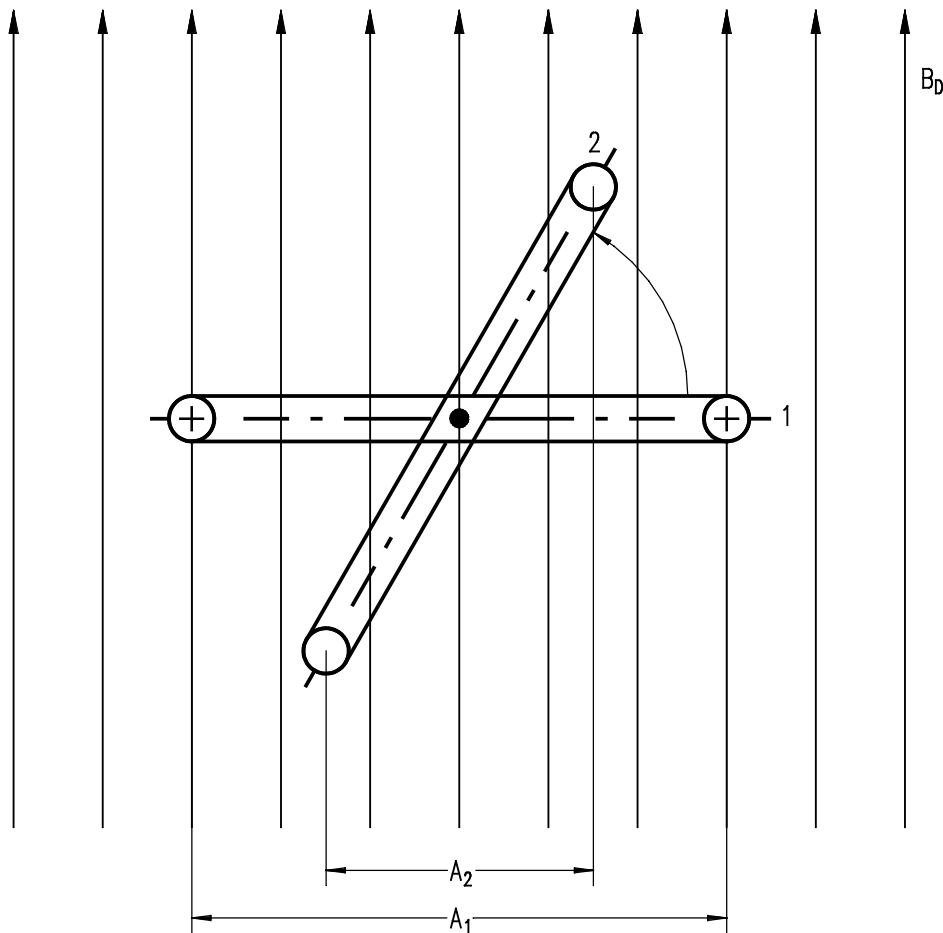


Abbildung 57 Drehbare Leiterschleife in einem magnetischen Feld

Um die Ursache für diese Spannungsänderung zu erklären, soll mit der gleichen Versuchsanordnung ein anderes Experiment durchgeführt werden.

Die Leiterschleife wird waagrecht in dem magnetischen Feld angeordnet und bleibt in Ruhelage. An den beiden Enden wird wieder ein Spannungsmessgerät angeschlossen.

Bei konstanter Induktion des magnetischen Feldes zeigt das Messgerät keine Spannung an. Wird die Induktion des magnetischen Feldes allerdings verändert, schlägt das Messgerät aus. Das bedeutet, dass die an der Leiterschleife anliegende Spannung durch die Änderung der Induktion des magnetischen Feldes erzeugt wird. Man sagt, die Spannung wird induziert. Dies ist der Grund dafür, dass die magnetische Flussdichte  $B$  auch als Induktion bezeichnet wird.

Aus welchem Grund entsteht nun auch bei einer sich drehenden Leiterschleife in einem magnetischen Feld mit konstanter Induktion eine Spannung wie in dem ersten beschriebenen Versuch?

Dies liegt an der aktiven, von der Induktion durchsetzten Fläche der Leiterschleife, die sich mit der Drehung der Leiterschleife ändert. Die Anteile der magnetischen Induktion, die durch die Leiterschleife umschlossen werden, sind in der Stellung 1 der Leiterschleife größer (aktive Fläche  $A_1$ ) als in der Stellung 2 (aktive Fläche  $A_2$ , vgl. Abbildung 57). Das entspricht einer Änderung der Induktion innerhalb der Leiterschleife wie im zweiten Versuch und diese Änderung erzeugt die Spannung an den Enden der Leiterschleife. Das folgende Bild zeigt mithilfe der magnetischen Feldlinien diesen Zusammenhang.

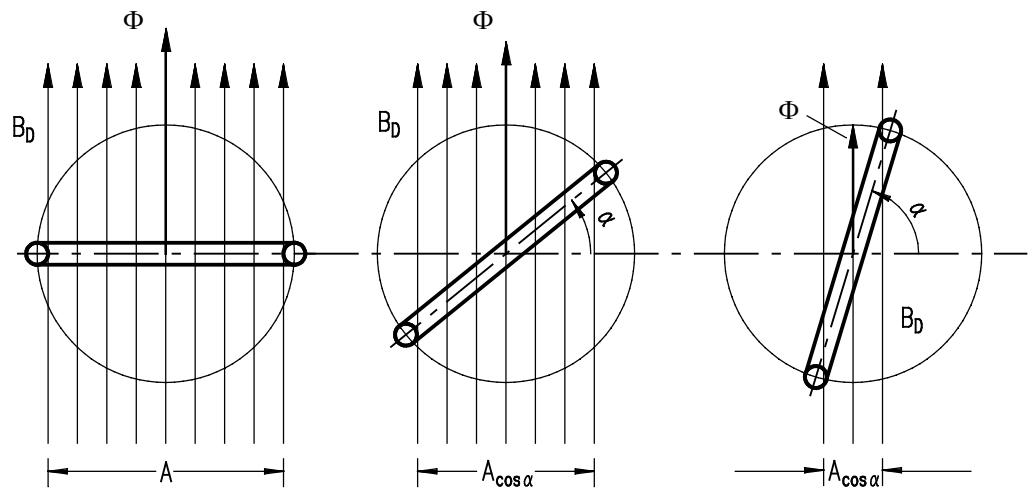


Abbildung 58 Aktive Flussdichte durch eine drehbare Leiterschleife

Ein Maß für die magnetische Induktion über eine Fläche ist der magnetische Fluss  $\Phi$  (Phi). Hier ändert sich die Fläche mit dem Winkel  $\alpha$ , um den sich die Leiterschleife aus der waagerechten Ruhestellung bewegt hat. Der entsprechende Zusammenhang lautet:

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos \alpha$$

Die induzierte Spannung wird als Quellenspannung  $U_q$  bezeichnet. Da die Spannung nur bei einer Änderung des magnetischen Flusses erzeugt wird, ist die Quellenspannung  $U_q$  auch zeitabhängig, also abhängig von der Änderung des magnetischen Flusses  $\Delta\Phi$  pro Zeiteinheit  $\Delta t$ .

Die induzierte Spannung ergibt sich also aus

$$U_q = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Dieser Zusammenhang wird Induktionsgesetz genannt. Dieses Prinzip ist die Grundlage für alle stromerzeugenden Generatoren, die über eine Welle angetrieben werden. Einzige Ausnahme ist die Stromerzeugung durch Fotovoltaikmodule.

In der Praxis werden häufig Leiterschleifen mit etlichen Windungen, so genannte Spulen, verwendet (z.B. in Motoren und Generatoren). Da der magnetische Fluss mit jeder Leiterschleife größer wird, vergrößert sich auch die induzierte Spannung mit der Anzahl  $N$  der in Reihe geschalteten Leiterschleifen. Eine solche Anordnung von Leiterschleifen wird Spule genannt.



Das Induktionsgesetz lautet dann:

$$u_q = \frac{N \cdot \Delta \Phi}{\Delta t}$$

Bei einer Spule mit unterschiedlich großen Leiterschleifen oder unterschiedlichen magnetischen Flüssen durch die Leiterschleifen muss die Summe der magnetischen Flüsse durch die einzelnen Leiterschleifen gebildet werden. Für diese Summe der magnetischen Flüsse ergibt sich:

$$\Psi \approx \sum_{n=1}^N \Phi \quad (\Psi = \text{Psi})$$

In der Praxis werden Spulen aber überwiegend so aufgebaut, dass der magnetische Fluss durch jede Leiterschleife annähernd gleich ist. Es ergibt sich also näherungsweise:

$$\Psi \approx N \cdot \Phi$$

### Induktivität

Da in der Praxis oft mit unterschiedlichen Arten von Spulen gearbeitet wird, muss der Effekt der Induktion auch entsprechend berücksichtigt werden. Um dieses zu vereinfachen, wurde der Begriff Induktivität eingeführt, der eine direkte Beziehung zwischen einer eingprägten Stromänderung und der daraus resultierenden Induktion, also der induzierten Spannung herstellt.

Aus der obigen Formel für den magnetischen Gesamtfluss durch eine Spule lässt sich mithilfe der bekannten Größen des magnetischen Feldes folgende Umformung durchführen:

$$\Psi \approx N \cdot \Phi = N \cdot B \cdot A = N \cdot \mu_o \cdot \mu_r \cdot H \cdot A$$

$$H = \frac{N \cdot i}{l}$$

$$\Psi \approx N \cdot \mu_o \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot i}{l} \cdot A = \frac{N^2 \cdot \mu_o \cdot \mu_r \cdot A}{l} \cdot i$$

Daraus wird die Induktivität L wie folgt definiert:

$$L = \frac{N^2 \cdot \mu_o \cdot \mu_r \cdot A}{l}$$

Die Induktivität einer Spule ist also ausschließlich von der Windungszahl, der Permeabilitätskonstanten und der Geometrie der Spule abhängig. Wie bei einem Kondensator die Bauform die Kapazität bestimmt, bestimmt also die Bauform der Spule die Induktivität.

Die Einheit der Induktivität ergibt sich, wenn in dieser Formel wieder die Größen  $\Phi$  und  $i$  eingesetzt werden:

$$L = \frac{N^2 \cdot \Phi}{N \cdot i} = \frac{N \cdot \Phi}{i}; \quad [L] = \frac{Vs}{A} = H \text{ (Henry)}$$

Die Induktivität wird in H = Henry angegeben.

Mit der Induktivität ergibt sich für die induzierte Spannung der direkte Zusammenhang zwischen Stromänderung und induzierter Spannung.

$$U_q = \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = \frac{N^2 \cdot \mu_o \cdot \mu_r \cdot A}{l} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Das Schaltzeichen einer Induktivität sieht folgendermaßen aus:



Abbildung 59 Schaltzeichen einer Induktivität

### Reihenschaltung von Induktivitäten

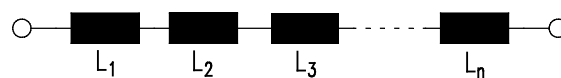


Abbildung 60 Reihenschaltung von Induktivitäten

Bei einer Reihenschaltung von Induktivitäten ohne magnetische Kopplung wird in jeder Spule durch Änderung des eingepprägten Stromes ein entsprechendes unabhängiges magnetisches Feld erzeugt und eben dadurch auch eine entsprechende Selbstinduktionsspannung. Zur Versorgung der Reihenschaltung dient eine einstellbare Stromquelle. Da der Strom bzw. die Stromänderung in einer Reihenschaltung durch alle Spulen gleich ist und dadurch die induzierte Spannung in allen Spulen die gleiche Wirkungsrichtung hat, lässt sich für die gesamte induzierte Spannung folgende Gleichung aufstellen:

$$U_{q\text{ges}} = U_{q1} + U_{q2} + U_{q3} + \dots + U_{qn}$$

In dieser Gleichung lässt sich  $u_q$  ersetzen durch:

$$u_q = \frac{N \cdot \Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}$$

Mit

$$\frac{\Delta \Psi_{\text{ges}}}{\Delta t} = \frac{\Delta \Psi_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \Psi_2}{\Delta t} + \frac{\Delta \Psi_3}{\Delta t} + \dots + \frac{\Delta \Psi_n}{\Delta t}$$

und

$$\Delta \Psi = \frac{N^2 \cdot \mu_o \cdot \mu_r \cdot A}{l} \cdot \Delta i = L \cdot \Delta i$$

ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$L_{\text{ges}} \cdot \Delta i = L_1 \cdot \Delta i + L_2 \cdot \Delta i + L_3 \cdot \Delta i + \dots + L_n \cdot \Delta i$$

$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n$$

In einer Reihenschaltung von Spulen addieren sich also die Induktivitäten zu einer Gesamtinduktivität.

### Parallelschaltung von Induktivitäten

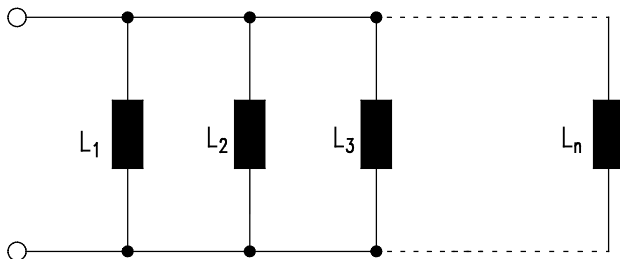


Abbildung 61 Parallelschaltung von Spulen

In einer Parallelschaltung von Spulen ohne magnetische Kopplung teilt sich der eingepreßte Strom zunächst gleichmäßig auf die einzelnen Zweige der Parallelschaltung auf, wenn der ohmsche Widerstand der Spulen vernachlässigt wird. In Abhängigkeit der Bauform der Spule, also der jeweiligen Induktivität, ergibt sich in jedem Zweig eine eigenständige Selbstinduktionsspannung und ein daraus resultierender Strom, der der eingepreßten Stromänderung entgegenwirkt. Die jeweiligen induzierten Ströme addieren sich in einer Parallelschaltung zu einem Gesamtstrom. Wie in einer Parallelschaltung von Widerständen ergibt sich so eine Gesamtinduktivität aus den Kehrwerten der Einzelinduktivitäten. Da die Herleitung dieses Zusammenhanges über die induzierte Spannung zur Induktivität recht aufwändig ist, soll hier darauf verzichtet werden.

Die Formel für die Gesamtinduktivität einer Parallelschaltung von Spulen lautet:

$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n}$$

### 2.2.4 Schaltvorgänge an der Spule

Ursache einer Spannungsinduktion in einer Leiterschleife ist nach den Erläuterungen der vorangehenden Kapitel eine Änderung des magnetischen Flusses durch diese Leiterschleife.

Außerdem haben wir festgestellt, dass auch durch einen elektrischen Strom durch einen Leiter ein magnetisches Feld und damit ein magnetischer Fluss erzeugt wird.

Diese Zusammenhänge führen zu der Erkenntnis, dass durch einen zeitlich veränderlichen Strom durch eine Leiterschleife und das sich dadurch ändernde magnetische Feld ebenfalls eine Spannung induziert werden muss.

Diese in der Leiterschleife induzierte Spannung wird als Selbstinduktionsspannung bezeichnet. Der von außen an die Leiterschleife angelegte Strom wird auch eingepreßter Strom genannt.

Auf Grund der Wirkungsrichtung einer eingprägten Stromänderung und des daraus resultierenden magnetischen Feldes wirkt die Selbstinduktionsspannung dieser Stromänderung entgegen. Auch die Selbstinduktionsspannung führt natürlich zu einem Stromfluss durch den Leiter.

Das bedeutet, dass der Strom, der durch die Selbstinduktionsspannung durch den Leiter fließt, der eingprägten Stromänderung entgegenwirkt. Dieser Strom verursacht natürlich auch seinerseits wieder ein magnetisches Feld und einen magnetischen Fluss, der der eingprägten Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt.

Die Selbstinduktion versucht so den ursprünglichen magnetischen Fluss und den ursprünglichen Stromfluss zu erhalten.

Der eingprägte Strom und der zugehörige magnetische Fluss, sowie der durch die Selbstinduktion entstehende Strom und der dazu gehörige magnetische Fluss überlagern sich.

Es ergibt sich ein Gesamtstrom, der aus der Summe des eingprägten Stromes und des induzierten Stromes zu einem bestimmten Zeitpunkt addiert wird. Da der durch die Selbstinduktion entstandene Strom der eingprägten Stromänderung entgegenwirkt, ergibt sich so eine zeitlich verzögerte Änderung des resultierenden Stromes.

Der eingprägte Strom und der durch die Selbstinduktion entstandene Strom können nicht unabhängig voneinander gemessen werden. Gemessen werden kann der resultierende Strom durch den Leiter.

Als Beispiel soll hier ein Schaltvorgang an einer Induktivität betrachtet werden. Dazu wird mithilfe eines Schalters eine Gleichspannung an die Reihenschaltung eines Widerstandes mit einer Induktivität angelegt. Die Schaltung sieht folgendermaßen aus:

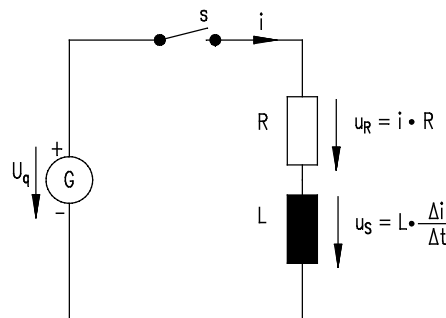


Abbildung 62 Stromkreis mit Widerstand und Induktivität

Wird der Schalter geschlossen, fließt sofort ein Strom  $i$  durch den Widerstand und die Induktivität. Das Schließen des Schalters bewirkt also eine rapide Änderung des eingprägten Stromes durch die Induktivität, die wiederum eine entsprechende Selbstinduktionsspannung hervorruft. Diese Selbstinduktionsspannung verursacht einen Stromfluss entgegen dem eingprägten Strom. Die Summe dieser beiden Ströme durch die Induktivität ist im ersten Moment Null.

Da der eingprägte Strom nach dem Einschalten konstant bleibt, wird die Selbstinduktionsspannung  $u_S$  und der entsprechende Strom geringer. Der durch die angelegte Spannung verursachte eingprägte Strom wird größer. Dieses Verhalten verläuft nach einer Exponentialfunktion mit der Naturkonstanten  $e$  als Basis. Die Selbstinduktionsspannung klingt entsprechend ab.

Der Verlauf der Selbstinduktionsspannung lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$u_s = u_q \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Die folgende Darstellung zeigt den Verlauf der induzierten Spannung  $u_s$  und den Stromverlauf durch Widerstand und Kondensator.

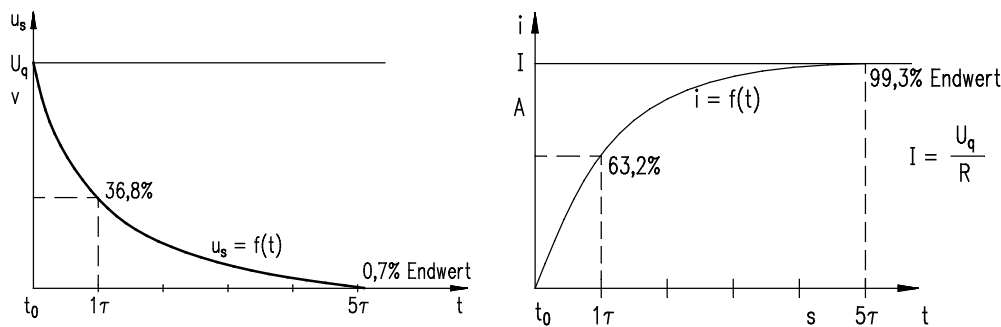


Abbildung 63 Verlauf der induzierten Spannung  $u_q$  und des Stromes  $i$

Nachdem die induzierte Spannung vollständig abgeklungen ist, hat der Strom seinen Endwert ebenfalls erreicht und die gesamte angelegte Spannung fällt am Widerstand ab.

Der Stromverlauf in Abhängigkeit der Zeit  $t$  lässt sich nach folgender Formel berechnen:

$$i = I \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Der Endwert des Stromes  $I$  lässt sich aus der angelegten Spannung  $U$  und dem Widerstand  $R$  berechnen:

$$I = \frac{U}{R}$$

Die Zeit  $\tau$ , nach der der Strom 63 % seines Endwertes erreicht hat, ergibt sich aus der Induktivität und dem Widerstand in dem Stromkreis:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Nach  $5 \tau$  hat der Strom seinen Endwert bis auf weniger als 1% erreicht.

Für das Ausschalten eines konstanten Stromes durch eine Induktivität ergibt sich ein Verhalten nach dem gleichen Prinzip. Dazu muss die Schaltung um einen Parallelwiderstand zur Induktivität und dem zugehörigen Reihenwiderstand ergänzt werden. Über diesen Parallelwiderstand fließt dann der durch die Selbstinduktion erzeugte Strom nach dem Öffnen des Schalters.

Die folgende Darstellung zeigt die entsprechende Schaltung:

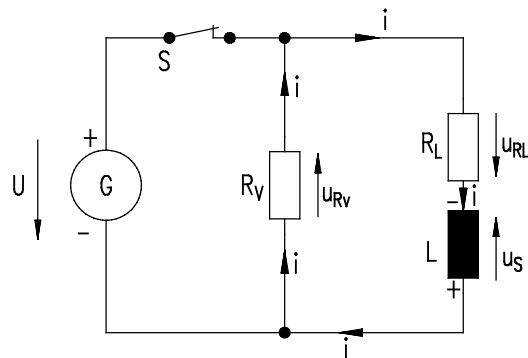


Abbildung 64 Ausschaltvorgang an einer Induktivität

Der Verlauf des Stromes und der Selbstinduktionsspannung in Abhängigkeit der Zeit sieht folgendermaßen aus:

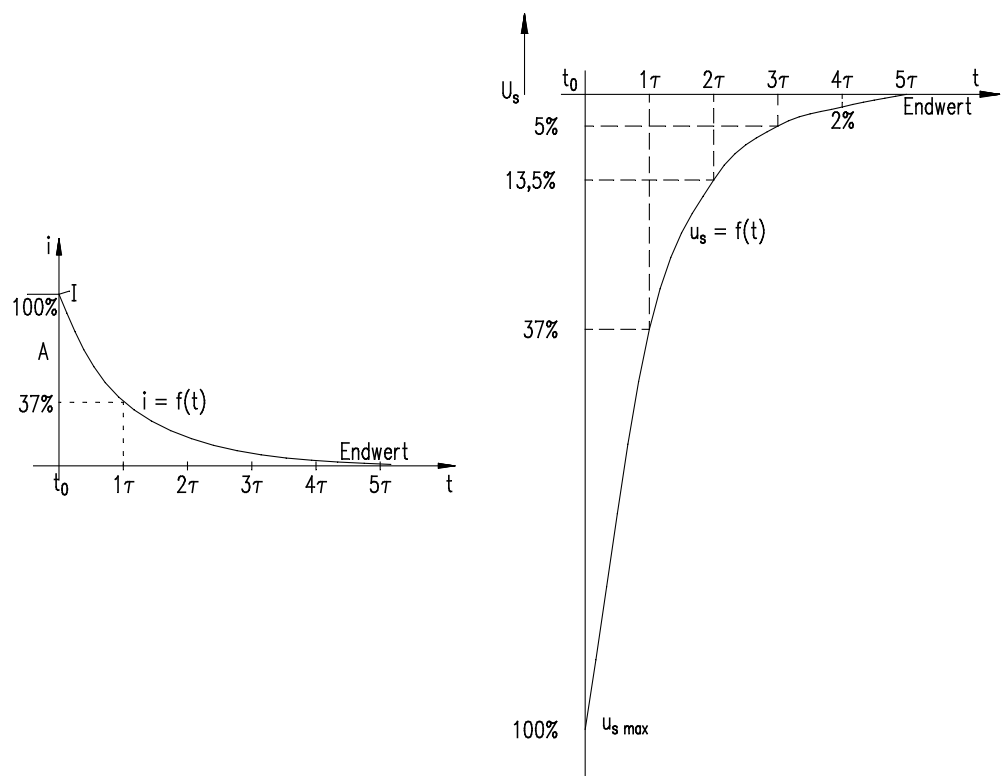


Abbildung 65 Verlauf des Stromes und der Selbstinduktionsspannung nach dem Ausschalten

Die Berechnung des Stromverlaufes erfolgt mithilfe folgender Formeln:

$$i = I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{L}{R_L + R_V}$$

$$I = \frac{U}{R_L + R_V}$$

$$u_s = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

**Aufgaben**Aufgabe 1

*Was ist die Ursache für ein elektrisches Feld?*

Aufgabe 2

*Erklären Sie den Unterschied zwischen einem homogenen elektrischen Feld und einem inhomogenen elektrischen Feld!*

Aufgabe 3

*Wie unterscheidet man in der zeichnerischen Darstellung ein homogenes Feld von einem inhomogenen Feld?*

Aufgabe 4

*Erläutern Sie den Begriff Äquipotenziallinie!*

*Wie werden die Äquipotenziallinien im Verhältnis zu den Feldlinien gezeichnet?*

Aufgabe 5

*Wie lässt sich der Effekt der Influenz nachweisen?*

Aufgabe 6

*Berechnen Sie die elektrische Feldstärke in einem Plattenkondensator, an dem 120 V Gleichspannung angelegt wurden!*

Die Platten haben einen Abstand von 1 cm.

*In welchen Abständen von den Platten würden Sie die Äquipotenziallinien bei 40 V und bei 80 V zwischen die Platten zeichnen?*

Aufgabe 7

Ein Plattenkondensator soll die Kapazität  $10 \mu\text{F}$  haben. Als Isolationsmaterial zwischen den Platten wird 0,1 mm dickes Papier gewählt mit einer Dielektrizitätskonstante von  $\epsilon_r = 6$ .

*Wie groß müssen die Platten sein, damit der Kondensator die gewünschte Kapazität erhält?*

Aufgabe 8

Es stehen drei Kondensatoren zur Verfügung, die beliebig verschaltet werden können:

$$C_1 = 1 \mu\text{F}, C_2 = 10 \mu\text{F}, C_3 = 12 \mu\text{F}.$$

*Welche größte Gesamtkapazität und welche kleinste Gesamtkapazität lässt sich mithilfe dieser drei Kondensatoren erreichen?*



### Aufgabe 9

Ein Kondensator mit einer Kapazität von  $10\ \mu\text{F}$  wird über einen Widerstand von  $1\text{ k}\Omega$  auf eine Spannung von  $100\text{ V}$  geladen.

*Nach welcher Zeit hat die Kondensatorspannung  $75\text{ V}$  erreicht?*

### Aufgabe 10

*Welcher Unterschied besteht zwischen den Feldlinien eines magnetischen Feldes und den Feldlinien eines elektrischen Feldes?*

### Aufgabe 11

*Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem elektrischen Feld und einem magnetischen Feld?*

### Aufgabe 12

*Erläutern Sie die Kraftwirkung des magnetischen Feldes anhand eines geraden stromdurchflossenen Leiters in einem konstanten magnetischen Feld eines Dauermagneten!*

### Aufgabe 13

*Was geschieht im umgekehrten Fall, wenn eine spannungslose Leiterschleife in einem magnetischen Feld gedreht wird?*

*Wie lautet der Fachausdruck für diesen Effekt?*

*In welchen elektrischen Geräten wird dieser Effekt genutzt?*

### Aufgabe 14

*Berechnen Sie die Induktivität einer Ringspule mit einem mittleren Durchmesser von  $3\text{ cm}$ , einem Kerndurchmesser von  $0,5\text{ cm}$  und der Windungszahl  $1000$ !*

Das magnetische Feld innerhalb der Ringspule ist homogen. Der Kern besteht aus Luft.

### Aufgabe 15

An eine Reihenschaltung aus Widerstand und Induktivität wird eine Gleichspannung von  $10\text{ V}$  gelegt und über einen Schalter eingeschaltet. Der Widerstandswert beträgt  $10\ \Omega$ , die Induktivität hat  $0,1\text{ H}$ .

*Welcher Gesamtstrom fließt  $25\text{ ms}$  nach dem Einschalten?*

**Lösungen**
**Lösungsanhang**
**1 Spannung, Strom, Widerstand**
**Aufgabe 1**

Kleinste bekannte positive oder negative Ladungsmenge;  $\pm e = \pm 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

**Aufgabe 2**

Protonen: positive Elementarladung

Elektronen: negative Elementarladung

**Aufgabe 3**

Ladungstrennung durch Arbeit an einer bestimmten Ladungsmenge

**Aufgabe 4**

Batterien, Akkumulatoren, Generatoren, Thermoelemente, Fotoelemente, Piezo-Kristalle

**Aufgabe 5**

Minuspol

**Aufgabe 6.1**

A und C

**Aufgabe 6.2**

Technische Stromrichtung

**Aufgabe 7**

$$Q = Q - Q_1 = 20 \text{ Ah} - 4,7 \text{ Ah} = 15,3 \text{ Ah}$$

$$Q = I \cdot t \Rightarrow t = \frac{Q}{I}$$

$$t = \frac{15,3 \text{ Ah}}{1,8 \text{ A}} = \underline{\underline{8,5 \text{ h}}}$$

**Aufgabe 8**

Metallische Leiter: freie Elektronen (Elektronengas)

Elektrolyten: positive und negative Ionen

**Aufgabe 9**

Geschlossener Stromkreis, Spannung, bewegliche Ladungsträger

**Aufgabe 10**

Überlagerung von Gleich- und Wechselstrom; arithmetischer Mittelwert ungleich Null

**Aufgabe 11**

Die Stromdichte ist verantwortlich für die Erwärmung eines Leiters

**Aufgabe 12**

Der Leitwert ist der Kehrwert des Widerstandes

**Aufgabe 13**

Länge, Querschnitt, spezifischer Widerstand, Temperatur

**Aufgabe 14**

PTC-Widerstand: Positiver Temperaturkoeffizient, d.h. je höher die Temperatur, umso größer ist der Widerstand.

NTC-Widerstand: Negativer Temperaturkoeffizient, d.h. je höher die Temperatur, umso kleiner ist der Widerstand.

**Aufgabe 15**

$$R = \frac{l}{\kappa \cdot A} = \frac{17.000 \text{ m}}{56 \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2} \cdot 16 \text{ mm}^2} = \underline{\underline{18,97 \Omega}}$$

**Aufgabe 16**

$$R_{3240} = R_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$$

$$\Rightarrow R_{20} = \frac{R_{3240}}{(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)}$$

$$\Delta\vartheta = (3240 - 20) ^\circ\text{C} = 3220 ^\circ\text{C}$$

$$R_{20} = \frac{487 \Omega}{\left(1 + 0,0041 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot 3220 ^\circ\text{C}\right)} = \underline{\underline{34,29 \Omega}}$$

**Aufgabe 17**

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A} = \frac{1,04 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot 12,2 \text{ m}}{0,8 \text{ mm}^2} = 15,86 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{230 \text{ V}}{15,86 \Omega} = \underline{\underline{14,5 \text{ A}}}$$

**Aufgabe 18**

$$\kappa_A = \frac{1}{\rho_A} = \frac{1}{0,33 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}} = 3 \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2}$$

Beide Werkstoffe sind gleich gute Leiter.

**Aufgabe 19**

Maximale Leistung einer (elektrischen) Maschine, die im Dauerbetrieb abgegeben werden kann.

**Aufgabe 20**

Spannung erhöht sich um das 6-fache  $\Rightarrow$  36-fache Leistung

**Aufgabe 21**

Entnahme maximaler Leistung aus einer Energiequelle,  $R_a = R_i$ , Kommunikationstechnik

**Aufgabe 22**

$$\eta = 50 \%$$

**Aufgabe 23**

Spannungsanpassung:  $R_a > R_i$

Stromanpassung:  $R_a < R_i$

**Aufgabe 24.1**

$$W = F \cdot s = 2500 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} = \underline{\underline{25.000 \text{ Nm}}}$$

**Aufgabe 24.2**

$$P = \frac{W}{t \cdot \eta_M} = \frac{25.000 \text{ Nm}}{10 \text{ s} \cdot 0,8} = 3125 \text{ W} = \underline{\underline{3,125 \text{ kW}}}$$

**Aufgabe 24.3**

$$P_{zu} = \frac{P_{ab}}{\eta_A} = \frac{3,125 \text{ kW}}{0,6} = \underline{\underline{5,21 \text{ kW}}}$$

**Aufgabe 24.4**

$$P_{zu} = U \cdot I \Rightarrow I = \frac{P_{zu}}{U} = \frac{5210 \text{ W}}{230 \text{ V}} = \underline{\underline{22,65 \text{ A}}}$$

**Aufgabe 24.5**

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow W = P \cdot t = 5210 \text{ W} \cdot 10 \text{ s}$$

$$W = 52100 \text{ Ws} = 14,47 \text{ Wh} = 0,015 \text{ kWh}$$

$$K = k \cdot W = 0,04 \text{ EUR / kWh} \cdot 0,015 \text{ kWh}$$

$$K = 0,0006 \text{ EUR}$$

**Aufgabe 25**

In einem Knoten ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

**Aufgabe 26**

Leerlaufspannung : Quellenspannung bei  $I = 0$

Klemmenspannung: Bei Belastung an den Klemmen einer Spannungsquelle anliegende Spannung.

Innerer Spannungsfall: Am Innenwiderstand einer realen Spannungsquelle bei Belastung abfallende Spannung.

**Aufgabe 27**

$$U_c = U_q - U_{kl} = 5,26 \text{ V} - 4,75 \text{ V} = 0,51 \text{ V}$$

$$I = \frac{U_i}{R_i} = \frac{0,51 \text{ V}}{20 \text{ m}\Omega} = \underline{\underline{25,5 \text{ A}}}$$

**Aufgabe 28**

$$R_{1/2} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} ; \quad R_{4/5} = R_4 // R_5 = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5}$$

$$R_{1/2/4/5} = R_{1/2} + R_{4/5}$$

$$R_g = R_3 // R_{1/2/4/5} = \frac{R_3 \cdot R_{1/2/4/5}}{R_3 + R_{1/2/4/5}}$$

**Aufgabe 29**

$$R_{2/3} = 120 \, \Omega ; \quad R_{5-7} = \frac{1}{\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}} = 15 \, \Omega$$

$$R_{2-4} = R_4 // R_{2/3} = 40 \, \Omega$$

$$R_g = R_1 + R_{2-4} + R_{5-7} + R_8 = \underline{\underline{100 \, \Omega}}$$

**Aufgabe 30.1**

$$R_{Ltg} = \frac{2 \cdot l}{\kappa \cdot A} = \frac{2 \cdot 18 \, m}{56 \frac{m}{\Omega \cdot mm^2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (1,5 \, mm)^2} = 0,36 \, \Omega$$

$$R_a = R_1 + R_2 + R_{Ltg} = 32,36 \, \Omega$$

$$I = \frac{U_a}{R_a} = \frac{216 \, V}{32,36 \, \Omega} = \underline{\underline{6,67 \, A}}$$

**Aufgabe 30.2**

$$U_i = I \cdot R_i = 6,67 \, A \cdot 18 \, \Omega = 12 \, V$$

$$U_q = U_{kl} + U_i = \underline{\underline{228 \, V}}$$

**Aufgabe 30.3**

$$U_{Ltg} = R_{Ltg} \cdot I = 0,36 \, \Omega \cdot 6,67 \, A = \underline{\underline{2,4 \, V}}$$

$$U_1 = R_1 \cdot I = 14 \, \Omega \cdot 6,67 \, A = \underline{\underline{93,38 \, V}}$$

$$U_2 = R_2 \cdot I = 18 \, \Omega \cdot 6,67 \, A = \underline{\underline{120,06 \, V}}$$

**Aufgabe 31.1**

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 3020 \, \Omega$$

$$R_{234} = \frac{R_{23} \cdot R_4}{R_{23} + R_4} = 858,8 \, \Omega$$

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_{234} = 2358,8 \, \Omega$$

$$I_{\text{ges}} = I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \underline{\underline{33,9 \, \text{mA}}}$$

$$U_{234} = I \cdot R_{234} = 29,1 \, \text{V}$$

$$I_2 = \frac{U_{234}}{R_{23}} = \underline{\underline{9,6 \, \text{mA}}}$$

$$U_3 = I_2 \cdot R_3 = \underline{\underline{7,87 \, \text{V}}}$$

**Aufgabe 31.2**

$$I = \frac{U}{R_1} = \underline{\underline{53,3 \, \text{mA}}}$$

**Aufgabe 31.3**

$S_1, S_2$  offen:

$$I_2 = \frac{U_{234}}{R_{23}}$$

$S_1$  geschlossen,  $S_2$  offen:

$$I_2 = \frac{U_{2345}}{R_{23}} \Rightarrow U_{2345} = I \cdot R_{2345}$$

$$R_{2345} = R_{23} \parallel R_4 \parallel R_5 \downarrow \text{ als } R_{234}$$

$$\Rightarrow U_{2345} \text{ kleiner als } U_{234}$$

$$\Rightarrow I_2 \text{ wird kleiner, da Spannung an } R_{23} \text{ sinkt}$$

### Aufgabe 32.1

$$U = U_1 + U_{2-3} + U_4$$

$$U_{2-3} = U - U_4 - U_1$$

$$U_4 = I_1 \cdot R_4 = 270 \text{ mA} \cdot 10 \Omega = 2,7 \text{ V}$$

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 270 \text{ mA} \cdot 47 \Omega = 0,27 \text{ A} \cdot 47 \Omega = \underline{\underline{12,7 \text{ V}}}$$

$$U_{2-3} = U - U_1 - U_4 = 24 \text{ V} - 12,7 \text{ V} - 2,7 \text{ V} = \underline{\underline{8,6 \text{ V}}}$$

$$U_{2-3} = R_2 \cdot I_2$$

$$R_2 = \frac{U_{2-3}}{I_2} = \frac{8,6 \text{ V}}{86 \text{ mA}} = \frac{8,6 \text{ V}}{0,086 \text{ A}} = \underline{\underline{100 \Omega}}$$

$$U_{2-3} = R_3 \cdot I_3$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 270 \text{ mA} - 86 \text{ mA} = 184 \text{ mA}$$

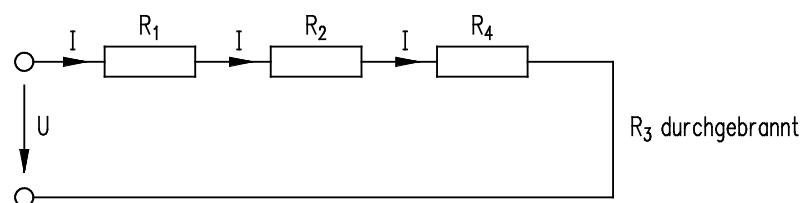
$$\Rightarrow R_3 = \frac{8,6 \text{ V}}{184 \text{ mA}} = \frac{8,6 \text{ V}}{0,184 \text{ A}} = \underline{\underline{46,7 \Omega}}$$

### Aufgabe 32.2

$$P = U_4 \cdot I_1 = \frac{(U_4)^2}{R_4} = I_1^2 \cdot R_4$$

$$P = (270 \text{ mA})^2 \cdot 10 \Omega = (0,27 \text{ A})^2 \cdot 10 \Omega = \underline{\underline{0,729 \text{ W}}}$$

### Aufgabe 32.3



$$\Rightarrow I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{24 \text{ V}}{47 \Omega + 100 \Omega + 10 \Omega} = \frac{24 \text{ V}}{157 \Omega} = \underline{\underline{0,153 \text{ A}}}$$



**Aufgabe 33.1**

$$R_{2-4} = \frac{U}{I_{2-4}} = \frac{24 \text{ V}}{0,205 \text{ A}} = 117,1 \Omega$$

$$\frac{1}{R_{2-4}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{3-4}}$$

$$\frac{1}{R_{3-4}} = \frac{1}{R_{2-4}} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{117,1 \Omega} - \frac{1}{220 \Omega} \Rightarrow R_{3-4} = 250,4 \Omega$$

$$R_4 = R_{3-4} - R_3 = 250,4 \Omega - 100 \Omega = 150,4 \Omega$$

**Aufgabe 33.2**

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{24 \text{ V}}{100 \Omega} = 240 \text{ mA}$$

$$I = I_1 + I_{2-4} = 240 \text{ mA} + 205 \text{ mA} = \underline{\underline{445 \text{ mA}}}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{24 \text{ V}}{220 \Omega} = 109 \text{ mA}$$

$$I_{3-4} = I_{2-4} - I_2 = 205 \text{ mA} - 109 \text{ mA} = 96 \text{ mA}$$

$$U_4 = R_4 \cdot I_{3-4} = 150,4 \Omega \cdot 96 \text{ mA} = \underline{\underline{14,4 \text{ V}}}$$

**Aufgabe 33.3**

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{100 \Omega} + \frac{1}{220 \Omega} + \frac{1}{100 \Omega} \Rightarrow R = 40,7 \Omega$$

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(24 \text{ V})^2}{40,7 \Omega} = \underline{\underline{14,1 \text{ W}}}$$

## 2 Elektrische und magnetische Felder

### Aufgabe 1

Die Ursache für ein elektrisches Feld sind unterschiedliche elektrische Ladungen (Ladungs- oder Spannungspotenziale) auf voneinander isolierten Ladungsträgern. Zwischen diesen Ladungsträgern (Metallplatten oder Leiter) entsteht das elektrische Feld.

### Aufgabe 2

In einem homogenen elektrischen Feld sind die Größen des elektrischen Feldes (elektrische Feldstärke und Verschiebungsdichte) an jeder Stelle innerhalb des Wirkungsbereiches des elektrischen Feldes gleich. In einem inhomogenen elektrischen Feld sind diese Größen an verschiedenen Punkten unterschiedlich.

### Aufgabe 3

Ein homogenes elektrisches Feld wird durch Feldlinien gleichen Abstandes dargestellt. Ein inhomogenes elektrisches Feld wird durch Feldlinien unterschiedlicher Dichte dargestellt. Feldlinien mit größerer Dichte kennzeichnen die Bereiche mit größerer Feldstärke. Diese Darstellung ist lediglich eine Prinzipdarstellung und kein absolutes Maß für die Größen des elektrischen Feldes.

### Aufgabe 4

In einem elektrischen Feld werden Linien oder Flächen mit gleichem Potenzial mithilfe von Äquipotenziallinien dargestellt. Die Äquipotenziallinien stehen senkrecht auf den Feldlinien.

### Aufgabe 5

Werden zwei leitfähig miteinander verbundene Metallplatten in ein elektrisches Feld gebracht und dann getrennt wieder aus dem elektrischen Feld entfernt, lassen sich auf den Platten unterschiedliche Ladungen (Potenziale) nachweisen. Durch das elektrische Feld wurden die unterschiedlichen Ladungsträger in den Platten in unterschiedliche Richtungen bewegt.

### Aufgabe 6

$$E = \frac{U}{l} = \frac{120 \text{ V}}{1 \text{ cm}} = 120 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$$

$$U_{40} = 40 \text{ V} \quad l_{40} = \frac{U_{40}}{E} = \frac{40 \text{ V}}{120 \frac{\text{V}}{\text{cm}}} = 0,33 \text{ cm}$$

$$U_{80} = 80 \text{ V} \quad l_{80} = \frac{U_{80}}{E} = \frac{80 \text{ V}}{120 \frac{\text{V}}{\text{cm}}} = 0,66 \text{ cm}$$

Die eine Äquipotenziallinie liegt bei 0,33 cm, die andere bei 0,66 cm Abstand von den Platten.

**Aufgabe 7**

$$C = 10 \mu\text{F} \quad \epsilon_r = 6 \quad \epsilon_o = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \quad d = 0,1 \text{ mm}$$

$$C = \frac{\epsilon_o \cdot \epsilon_r \cdot A}{d}$$

$$A = \frac{C \cdot d}{\epsilon_o \cdot \epsilon_r} = \frac{0,00001 \text{ F} \cdot 0,1 \text{ mm}}{8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 6} = \frac{1 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot \text{m}}{5,3124 \cdot 10^{-11} \frac{\text{F}}{\text{m}}}$$

$$A = 18,82 \text{ m}^2$$

**Aufgabe 8**

Parallelschaltung:

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + C_3$$

$$C_{\text{ges}} = 1 \mu\text{F} + 10 \mu\text{F} + 12 \mu\text{F} = 23 \mu\text{F}$$

Reihenschaltung:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{1 \mu\text{F}} + \frac{1}{10 \mu\text{F}} + \frac{1}{12 \mu\text{F}} = \frac{1}{0,845 \mu\text{F}}$$

$$C_{\text{ges}} = 0,845 \mu\text{F}$$

**Aufgabe 9**

$$U_c = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \tau = R \cdot C = 1 \text{ k}\Omega \cdot 10 \mu\text{F} = 0,01 \text{ s}$$

$$\frac{U_c}{U} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{U_c}{U} - 1 = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{75 \text{ V}}{100 \text{ V}} - 1 = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$-0,25 = -e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\ln 0,25 = -\frac{t}{\tau}$$

$$t = -\tau \cdot \ln 0,25$$

$$t = -0,01 \text{ s} \cdot (-1,386) = 0,01386 = 13,86 \text{ ms}$$

**Aufgabe 10**

Die Feldlinien des elektrischen Feldes haben einen Anfang und ein Ende. Die Feldlinien des magnetischen Feld sind immer geschlossen.

### Aufgabe 11

Ein elektrisches Feld übt eine Kraftwirkung auf Ladungsträger aus und erzeugt so einen Stromfluss. Ein elektrischer Strom erzeugt wiederum ein magnetisches Feld.

### Aufgabe 12

Der elektrische Strom durch einen Leiter bewirkt ein magnetisches Feld, dessen Wirkung sich zu der Wirkung des äußeren magnetischen Feldes durch den Dauermagneten addiert. Der Leiter wird von der Seite, an der sich die Wirkung der elektrischen Felder auf Grund gleicher Wirkungsrichtung addiert, abgestoßen und zu der Seite, an der sich die Wirkung der elektrischen Felder auf Grund unterschiedlicher Wirkungsrichtung zum Teil aufhebt, angezogen und bewegt sich in die entsprechende Richtung.

### Aufgabe 13

An den Enden der Leiterschleife entsteht eine Spannung. Dieser Effekt wird Induktion genannt. Der Effekt wird in Generatoren zur Stromerzeugung genutzt.

### Aufgabe 14

$$L = \frac{N^2 \cdot \mu_r \cdot \mu_o \cdot A}{l}$$

$$\mu_r = 1$$

$$\mu_o = 12,56 \cdot 10^{-9} \frac{\text{H}}{\text{cm}}$$

$$\text{mittlerer Durchmesser der Ringspule: } d_1 = 3 \text{ cm}$$

$$\text{Kerndurchmesser der Windungen: } d_2 = 0,5 \text{ cm}$$

$$\text{mittlere Feldlinienlänge: } l = \pi \cdot d_1 = \pi \cdot 3 \text{ cm} = 9,425 \text{ cm}$$

$$\text{durchflutete Fläche: } A = \frac{\mu \cdot d_2^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0,5 \text{ cm})^2}{4} = 0,196 \text{ cm}^2$$

$$L = \frac{1.000^2 \cdot 1 \cdot 12,56 \cdot 10^{-9} \frac{\text{H}}{\text{cm}} \cdot 0,196 \text{ cm}^2}{9,425 \text{ cm}} = 0,26 \text{ mH}$$

**Aufgabe 15**

$$U = 10 \text{ V}$$

$$R = 10 \, \Omega$$

$$L = 0,1 \text{ H}$$

$$I_{t=0,025} = I \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad I = \frac{U}{R}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$I_{t=0,025} = \frac{U}{R} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\tau = \frac{0,1 \text{ H}}{10 \, \Omega} = 0,01 \text{ s}$$

$$I_{t=0,025} = \frac{10 \text{ V}}{10 \, \Omega} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{0,025 \text{ s}}{0,01 \text{ s}}} \right)$$

$$I_{t=0,025} = 1 \text{ A} \cdot (1 - 0,082)$$

$$I_{t=0,025} = 0,918 \text{ A}$$