

Inhaltsverzeichnis

0 Zeichen und Abkürzungen.....	4
0.1 Mengen	4
0.2 Besondere Konstanten.....	4
0.3 Besondere Zehnerpotenzen.....	4
0.4 Beziehungen zwischen Zahlen	4
0.5 Beziehungen zwischen Aussagen	4
0.6 Operationen mit Zahlen.....	5
0.7 Geometrie.....	5
0.8 Vektorrechnung.....	6
0.9 Differentialrechnung	6
0.10 Integralrechnung	6
1 Zahlen und Grundrechenarten	7
1.1 Runden von Zahlen.....	7
1.2 Zahlenmengen	7
1.2.1 Natürliche Zahlen \mathbb{N}	7
1.2.2 Ganze Zahlen \mathbb{Z}	7
1.2.3 Rationale Zahlen \mathbb{Q}	7
1.2.3.1 Erweitern eines Bruches	7
1.2.3.2 Kürzen eines Bruches.....	8
1.2.3.3 Primzahlen	8
1.2.3.4 Verwandeln eines Bruches in einen Dezimalbruch	8
1.2.3.5 Verwandeln eines periodischen Dezimalbruchs in einen Bruch.....	8
1.2.4 Reelle Zahlen \mathbb{R}	8
1.2.4.1 Gesetzmäßigkeiten für reelle Zahlen.....	9
1.2.4.2 Rechnen mit Quadratwurzeln	9
1.2.5 Komplexe Zahlen \mathbb{C}	9
1.3 Grundrechenarten	10
1.3.1 Addition und Subtraktion	10
1.3.2 Addition und Subtraktion von gleichnamigen Brüchen.....	10
1.3.3 Addition und Subtraktion von ungleichnamigen Brüchen	10
1.3.4 Multiplikation und Division	11
1.4 Klammerrechnen und Faktorisieren	11
1.5 Binomische Formeln	12
1.6 Polynomdivision	12
2 Funktionen und Gleichungen erster Ordnung.....	13
2.1 Zuordnungen und Dreisatz.....	13
2.1.1 Proportionale Zuordnung.....	13
2.1.2 Antiproportionale Zuordnung.....	13
2.2 Äquivalenzumformungen bei Gleichungen und Ungleichungen	13
2.2.1 Gleichungen	13

2.2.2 Ungleichungen	14
2.3 Funktionen als eindeutige Zuordnungen	14
2.3.1 Funktion einer Geraden	15
2.3.2 Nullstellen einer Geraden und Schnittpunkte zweier Geraden	16
2.3.3 Gleichungssysteme mit zwei Variablen	17
2.3.3.1 Gleichsetzungsverfahren	17
2.3.3.2 Einsetzungsverfahren	17
2.3.3.3 Additionsverfahren	17
2.3.4 Umkehrfunktionen	18
3 Funktionen und Gleichungen höherer Ordnung	19
3.1 Parabeln	19
3.2 Die allgemeine quadratische Funktion	21
3.3 Quadratische Gleichungen und deren Lösung	22
3.3.1 Quadratische Gleichung der Form $y = x^2 + q$	22
3.3.2 Quadratische Gleichung der Form $y = x^2 + px$	22
3.3.3 Allgemeine quadratische Gleichung der Form $y = x^2 + px + q$	22
3.3.4 Quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$	22
3.3.5 Satz von Vieta	23
3.4 Schnittpunkte von Parabeln mit anderen Grafen	23
3.4.1 Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems	23
3.4.2 Schnittpunkte einer Normalparabel mit einer Geraden	23
3.4.3 Schnittpunkte von zwei Parabeln	24
3.5 Wurfelfunktionen	25
3.6 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten	25
3.7 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten	27
3.8 Potenzen mit rationalen Exponenten	28
3.9 Exponentialfunktionen	29
3.10 Logarithmenfunktionen	31
3.11 Exponentialgleichungen	32
4 Geometrische Gesetze für zwei- und dreidimensionale Figuren	33
4.1 Planimetrie	33
4.1.1 Planimetrische Grundbegriffe	33
4.1.2 Grundkonstruktionen	35
4.1.3 Ähnlichkeit	37
4.1.4 Kongruenzsätze und besondere Linien und Punkte im Dreieck	38
4.1.5 Rechtwinkliges Dreieck	41
4.1.6 Kreis und Kreisteile	42
4.1.7 Flächen- und Umfangsberechnung	44
4.2 Trigonometrie	48
4.2.1 Sinus, Kosinus, Tangens	48
4.2.2 Trigonometrische Funktionen	48
4.2.3 Trigonometrische Berechnung im allgemeinen Dreieck	49

4.2.4 Darstellung trigonometrischer Funktionen mithilfe des Bogenmaßes der Winkel	50
4.2.5 Additionstheoreme	50
4.3 Stereometrie.....	51
4.3.1 Volumen und Oberfläche von Prismen	51
4.3.2 Volumen und Oberfläche von Zylinder, Pyramide und Kegel	52
4.3.3 Volumen und Oberfläche der Kugel	53
4.3.4 Volumen und Oberfläche von Pyramiden- und Kegelstümpfen	53
4.3.5 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern	55
5 Grundlagen der Analysis und Vektorrechnung.....	56
5.1 Vektoren und Matrizen	56
5.1.1 Grundlagen der Vektorrechnung	56
5.1.2 Multiplikation von Vektoren	58
5.1.3 (2 x 2)-Matrix	59
5.2 Einführung in die Differenzial- und Integralrechnung.....	60
5.2.1 Differenzialrechnung	60
5.2.2 Integralrechnung.....	64

0 Zeichen und Abkürzungen

0.1 Mengen

$M = \{5, 6, 7, 8\}$	Menge aus den Elementen 5, 6, 7 und 8 in aufzählender Form
L	Lösungsmenge für eine Gleichung oder Ungleichung
$\{\}$	Leere Menge
G	Grundmenge
W	Wertemenge
$M = \{x \in \mathbb{Q} \mid 5 \leq x \leq 8\}$	Menge in beschreibender Form
D	Definitionsmenge
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}^*	Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null $\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen $\left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\} \quad y \neq 0$
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^*	Menge der reellen Zahlen ohne die Null
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen $\{a + j \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

0.2 Besondere Konstanten

$\pi = 3,14159265358979\dots$	Kreiszahl pi
$e = 2,7182818284590\dots$	Eulersche Zahl e
$j = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit

0.3 Besondere Zehnerpotenzen

10^{-12}	Pico	p
10^{-9}	Nano	n
10^{-6}	Mikro	μ
10^{-3}	Milli	m
10^3	Kilo	k
10^6	Mega	M
10^9	Giga	G
10^{12}	Tera	T

0.4 Beziehungen zwischen Zahlen

$a = b$	a gleich b
$a \neq b$	a ungleich b
$10,4567 \approx 10,5$	10,4567 ist ungefähr gleich 10,5
$a > b$	a ist größer als b
$a < b$	a ist kleiner als b
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
$a \geq b$	a ist größer oder gleich b

0.5 Beziehungen zwischen Aussagen

$a \Rightarrow b$	Wenn die Aussage a richtig ist, dann ist auch die Aussage b richtig.
$a \Leftrightarrow b$	Genau dann, wenn die Aussage a richtig ist, dann ist auch die Aussage b richtig.

0.6 Operationen mit Zahlen

$a + b$	Summe (a plus b)
$a - b$	Differenz (a minus b)
$a \cdot b$	Produkt (a mal b)
$a : b$	Quotient (a geteilt durch b)
a^b	Potenz (a hoch b)
$\log_a x$	Logarithmus von x zur Basis a
e^x	e-Funktion
$\ln x$	natürlicher Logarithmus
$ a $	Betrag der Zahl a
\sqrt{a}	Wurzel aus a, $a \geq 0$
$\sqrt[n]{a}$	n-te Wurzel aus a, $a \geq 0$
$\sin x, \sin \alpha$	Sinus des Winkels x (in Bogenmaß) bzw. α (in Gradmaß)
$\cos x, \cos \alpha$	Kosinus des Winkels x (in Bogenmaß) bzw. α (in Gradmaß)
$\tan x, \tan \alpha$	Tangens des Winkels x (in Bogenmaß) bzw. α (in Gradmaß)

0.7 Geometrie

A, B, C,...	Punkte
P (5 ; 10)	Punkt im Koordinatensystem mit den Koordinaten 5 (x-Wert) und 10 (y-Wert)
g, h, k,...	Geraden
AB	Gerade durch die Punkte A und B
$g \parallel h$	g ist parallel zu h
$g \perp h$	g steht senkrecht auf h
[AB]	Strecke von A bis B
\overline{AB}	Länge der Strecke [AB]
\widehat{AB}	Kreisbogen von A bis B
$k(M ; r)$	Kreis um den Mittelpunkt M mit dem Radius r
$\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \rho \varphi$	alpha, beta, gamma, delta, epsilon, rho, phi
$\angle (ABC)$	Winkel im Scheitelpunkt B mit den Punkten A und C auf jeweils einem Schenkel
$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$	Das Dreieck ABC ist kongruent zum Dreieck A'B'C'.
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$	Das Dreieck ABC ist ähnlich zum Dreieck A'B'C'.
l, b, h	Länge, Breite, Höhe
m_a	Mittelsenkrechte auf die Seite a
w_α	Winkelhalbierende des Winkels α
s_a	Seitenhalbierende der Seite a
h_a	Höhe (Lot vom Eckpunkt A) auf der Seite a
r, R	Radius, Umkreisradius
ρ	Inkreisradius
d, D	Durchmesser
s	Mantellinie eines Körpers
U	Umfang
A	Flächeninhalt allgemein
A_M	Mantelfläche eines Körpers
A_O	Oberfläche eines Körpers
V	Volumen eines Körpers

0.8 Vektorrechnung

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$	Vektoren
$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	Vektor in Komponentendarstellung mit der x-Komponente 3 und der y-Komponente 4
$\vec{0}$	Nullvektor
\vec{e}	Einheitsvektor
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	Quadratische 2x2-Matrix
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$	Spaltenvektor
$(a_1 \ a_2)$	Zeilenvektor
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$	Determinante einer Matrix

0.9 Differentialrechnung

∞	unendlich
$f'(x), f''(x)$	erste bzw. zweite Ableitungsfunktion der Funktion $f(x)$ (lies: f Strich von x bzw. f zwei Strich von x)
$\dot{s}(t), \ddot{s}(t)$	erste bzw. zweite Ableitungsfunktion der zeitabhängigen Funktion $s(t)$ (lies: s Punkt von t bzw. s zwei Punkt von t)

0.10 Integralrechnung

$F(x)$	Stammfunktion der Funktion $f(x)$
$\int_a^b f(x) dx$	bestimmtes Integral (lies: Integral von a bis b über f von x dx)

1 Zahlen und Grundrechenarten

1.1 Runden von Zahlen

Steht an der $(n + 1)$ -ten Stelle eine der Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 4, wird die n -te Stelle abgerundet. $105,92 \approx 105,9$

Steht an der $(n + 1)$ -ten Stelle eine der Ziffern 5, 6, 7, 8 oder 9, wird die n -te Stelle aufgerundet. $63,86 \approx 63,9$

1.2 Zahlenmengen

1.2.1 Natürliche Zahlen \mathbb{N}

Die Menge der natürlichen Zahlen hat unendlich viele Elemente. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

1.2.2 Ganze Zahlen \mathbb{Z}

Die negativen ganzen Zahlen, die Null und die positiven ganzen Zahlen bilden die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} . $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Der Abstand einer Zahl von der Null heißt Betrag. Zwei Zahlen mit dem gleichen Abstand von der Null heißen Gegenzahlen.

1.2.3 Rationale Zahlen \mathbb{Q}

Zwischen zwei ganzen Zahlen lassen sich beliebig viele andere Zahlen abtragen. Diese Zahlen werden Bruchzahlen genannt. Bruchzahlen, die sich als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen lassen, werden rationale Zahlen genannt. Sie bilden die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen.

1.2.3.1 Erweitern eines Bruches

Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert werden.

$$\frac{a \cdot 5}{b \cdot 5} = \frac{5a}{5b} \quad b \neq 0 \quad \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

1.2.3.2 Kürzen eines Bruches

Ein Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert werden.

$$\frac{12a : 4}{4b : 4} = \frac{3a}{b} \quad b \neq 0 \quad \frac{18 : 6}{24 : 6} = \frac{3}{4}$$

1.2.3.3 Primzahlen

Natürliche Zahlen, die genau zwei Teiler haben, nennt man Primzahlen. Sie sind nur durch 1 und sich selbst teilbar. Dabei ist 1 keine Primzahl. Die Primzahlen bis 50: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

1.2.3.4 Verwandeln eines Bruches in einen Dezimalbruch

Ein Bruch wird in einen Dezimalbruch umgeformt, indem der Zähler durch den Nenner dividiert wird.

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75 \quad \frac{4}{9} = 4 : 9 = 0,444... = 0,4\overline{}$$

1.2.3.5 Verwandeln eines periodischen Dezimalbruchs in einen Bruch

Die Ziffern der Periode werden in den Zähler geschrieben. Im Nenner müssen so viele Neunen geschrieben werden, wie die Periode Ziffern hat.

$$0,6\overline{3} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$$

Das Komma wird so weit nach rechts verschoben, bis die Periode hinter dem Komma beginnt. Es muss entsprechend mit einem Zehntelbruch (Hundertstelbruch usw.) multipliziert werden.

$$0,24\overline{4} = 2,4\overline{4} \cdot \frac{1}{10} = 2\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}$$

1.2.4 Reelle Zahlen \mathbb{R}

Zahlen, die sich als unendliche, nicht periodische Dezimalzahlen darstellen lassen, heißen irrationale Zahlen. Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen.

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

\sqrt{a} ist die nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ist. Sie heißt Quadratwurzel von a .

Intervallschachtelung: $[3 ; 4]$, $[3,3 ; 3,4]$, $[3,31 ; 3,32]$...

Jedes Intervall ist im vorhergehenden enthalten. Es gibt somit genau eine reelle Zahl, die in allen Intervallen liegt.

1.2.4.1 Gesetzmäßigkeiten für reelle Zahlen

Kommutativgesetz	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Neutrales Element	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Inverses Element	$a + (-a) = 0$	$a \cdot 1/a = 1$
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

1.2.4.2 Rechnen mit Quadratwurzeln

Gleiche Wurzeln können zusammengefasst werden:

$$5\sqrt{a} + 3\sqrt{b} + 2\sqrt{a} - 2\sqrt{b} = 7\sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Multiplikation von Quadratwurzeln:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Division von Quadratwurzeln:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

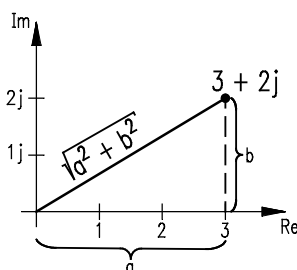
Wurzelterm aus Nenner eines Bruches in den Zähler bringen:

$$\frac{3}{\sqrt{a}} = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{3\sqrt{a}}{a}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} + 2} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b} - 2)}{(\sqrt{b} + 2)(\sqrt{b} - 2)} = \frac{\sqrt{ab} - 2\sqrt{a}}{b - 4}$$

1.2.5 Komplexe Zahlen \mathbb{C}

Summen aus je einer reellen Zahl a und einer imaginären Zahl bj heißen komplexe Zahlen. Jede komplexe Zahl lässt sich als Punkt in den vier Quadranten der Gaußschen Zahlenebene darstellen.



1.3 Grundrechenarten

1.3.1 Addition und Subtraktion

$$\begin{array}{rclcl} \text{Summand} & + & \text{Summand} & = & \text{Wert der Summe} \\ 5 & + & 7 & = & 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} \text{Minuend} & - & \text{Subtrahend} & = & \text{Wert der Differenz} \\ 20 & - & 12 & = & 8 \end{array}$$

Addition von rationalen Zahlen mit gleichen Vorzeichen:

$$(+7,5) + (+2,5) = +10 \qquad (-8,4) + (-7,5) = -15,9$$

Addition von rationalen Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen:

$$(+15) - (-5,5) = +20,5 \qquad (-12,5) - (-7,5) = -5$$

Vereinfachte Vorzeichenregeln

$$+ (+) = + \quad + (-) = - \quad - (+) = - \quad - (-) = +$$

Punktrechnung geht vor Strichrechnung.

$$-5 \cdot 15 + 18 : 3 = -75 + 6 = -69$$

Was in der Klammer steht, wird zuerst berechnet.

$$(-22 + 12) \cdot (25 - 10) = -10 \cdot 15 = -150$$

1.3.2 Addition und Subtraktion von gleichnamigen Brüchen

Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem die Zähler addiert bzw. subtrahiert werden und der Nenner unverändert bleibt.

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{3} = \frac{a+b}{3}$$

1.3.3 Addition und Subtraktion von ungleichnamigen Brüchen

Ungleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem sie vor dem Addieren bzw. Subtrahieren gleichnamig gemacht werden.

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{5} = \frac{5a}{20} + \frac{4b}{20} = \frac{5a+4b}{20}$$

Terme, bei denen im Nenner eine oder mehrere Variablen vorkommen, werden Bruchterme genannt. Dabei darf der Term im Nenner nicht die Zahl Null bezeichnen.

$$\frac{2x+y}{a} \quad a \neq 0$$

Für die Addition und Subtraktion von Bruchtermen gelten die selben Regeln wie für Brüche.

1.3.4 Multiplikation und Division

$$\begin{array}{rclcl} \text{Faktor} & \cdot & \text{Faktor} & = & \text{Wert des Produktes} \\ 4 & \cdot & 1,5 & = & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} \text{Dividend} & : & \text{Divisor} & = & \text{Wert des Quotienten} \\ 65 & : & 13 & = & 5 \end{array}$$

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem der Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert und der Nenner beibehalten wird.

$$\frac{a}{x} \cdot 4 = \frac{4a}{x} \quad x \neq 0$$

Ein Bruch wird mit einem Bruch multipliziert, indem die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert werden.

$$\frac{3}{5x} \cdot \frac{y}{2x} = \frac{3y}{10x^2} \quad x \neq 0$$

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem der Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert wird und der Zähler beibehalten wird.

$$\frac{5}{x} : 8 = \frac{5}{8x} \quad x \neq 0$$

Durch einen Bruch wird dividiert, indem mit seinem Kehrwert multipliziert wird.

$$\frac{20}{ab} : \frac{5}{a} = \frac{20}{ab} \cdot \frac{a}{5} = \frac{4}{b} \quad a, b \neq 0$$

Das Kürzen von Brüchen und Bruchtermen aus Summen ist nicht erlaubt.

Vorzeichenregeln

Sind die Vorzeichen gleich: Plus

$$(-a) : (-b) = a/b \quad b \neq 0 \quad (-2) \cdot (-a) = +2a$$

Sind die Vorzeichen verschieden: Minus

$$(-x) : (+y) = -x/y \quad y \neq 0 \quad (+10) \cdot (-4) = -40$$

1.4 Klammerrechnen und Faktorisieren

Steht vor der Klammer ein Pluszeichen (Plusklammer), so kann die Klammer weggelassen werden.

$$+(a - b) = a - b$$

Steht vor der Klammer ein Minuszeichen (Minusklammer), so müssen beim Auflösen der Klammer die Zeichen vor jedem Summanden in der Klammer umgekehrt werden.

$$-(x - y) = -x + y$$

Distributivgesetz

Ein Term wird mit einer Summe multipliziert, indem er mit jedem Summanden der Summe multipliziert wird.

$$a(b + c) = ab + ac$$

Eine Summe wird mit einer Summe multipliziert, indem jeder Summand der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert wird und die Teilprodukte addiert werden.

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

Ausklammern oder Faktorisieren

Faktorisieren eines gemeinsamen Faktors

$$20x + 10xy = 10x(2 + y) \quad -a - b = (-1)(a + b)$$

Faktorisieren aus Gruppen von Termen

$$ax + az + bx + bz = a(x + z) + b(x + z) = (x + z)(a + b)$$

1.5 Binomische Formeln

1. binomische Formel	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(5 + x)^2 = 25 + 10x + x^2$
2. binomische Formel	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(y - 2)^2 = y^2 - 4y + 4$
3. binomische Formel	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(z + 3)(z - 3) = z^2 - 9$

Faktorisieren mithilfe der binomischen Formeln

$$25p^2 + 30pq + 9q^2 = (5p + 3q)^2$$

$$r^2 - 2rs + s^2 = (r - s)^2$$

$$121t^2 - 49w^2 = (11t + 7w)(11t - 7w)$$

1.6 Polynomdivision

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 2x^2 - 25x + 50) : (x - 2) = x^2 - 25 \\
 \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
 0 - 25x + 50 \\
 \underline{-(-25x + 50)} \\
 0
 \end{array}$$

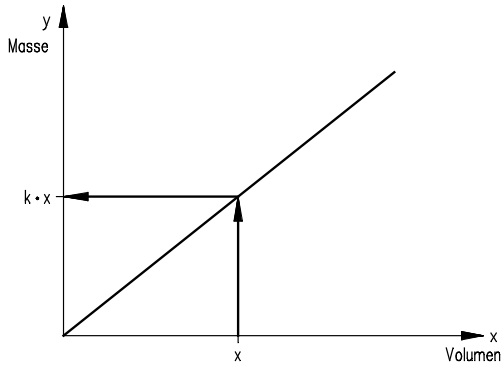
$$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

$$x^3 - 2x^2 - 25x + 50 = (x - 2)(x + 5)(x - 5)$$

2 Funktionen und Gleichungen erster Ordnung

2.1 Zuordnungen und Dreisatz

2.1.1 Proportionale Zuordnung



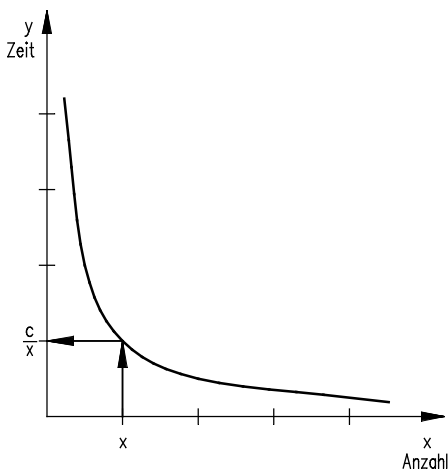
doppeltes Volumen → doppelte Masse

Hälfte des Volumens → Hälfte der Masse

$$x \rightarrow k \cdot x$$

k ist der Proportionalitätsfaktor

2.1.2 Antiproportionale Zuordnung



doppelte Anzahl → Hälfte der Zeit

Hälfte der Anzahl → doppelte Zeit

$$x \rightarrow c / x$$

c ist die Proportionalitätskonstante

2.2 Äquivalenzumformungen bei Gleichungen und Ungleichungen

2.2.1 Gleichungen

Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden, entsteht eine Gleichung.

$$5 + x = 12$$

Die Lösungsmenge bleibt unverändert, wenn auf beiden Seiten der Gleichung die selbe Zahl addiert oder subtrahiert wird.

$$\begin{aligned} 5 - 5 + x &= 12 - 5 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge bleibt unverändert, wenn auf beiden Seiten der Gleichung mit der selben Zahl ($\neq 0$) multipliziert oder durch die selbe Zahl ($\neq 0$) dividiert wird.

$$\begin{aligned} 8x &= 40 & | : 8 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

In einer Gleichung, in der außer der Variablen x noch andere Variablen vorkommen, heißt x die Lösungsvariable. Die anderen Variablen heißen Formvariablen. Sie sind Platzhalter für reelle Zahlen.

2.2.2 Ungleichungen

Werden zwei Terme durch eines der Zeichen $<$; $>$; \leq ; \geq verbunden, so entsteht eine Ungleichung.

$$x + 5 < 10$$

Die Lösungsmenge bleibt unverändert, wenn auf beiden Seiten der Gleichung die selbe Zahl addiert bzw. subtrahiert wird.

$$x + 5 - 5 < 10 - 5$$

$$x < 5$$

Die Lösungsmenge bleibt unverändert, wenn auf beiden Seiten der Ungleichung mit der selben positiven Zahl multipliziert oder durch die selbe positive Zahl dividiert wird.

$$2x > 14 \mid : 2$$

$$x > 2$$

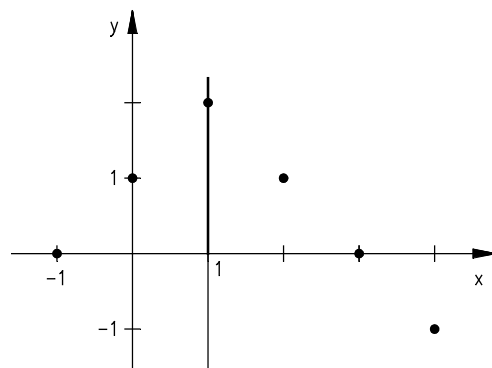
Werden beide Seiten einer Ungleichung mit der selben negativen Zahl multipliziert oder durch die selbe negative Zahl dividiert, müssen die Ungleichheitszeichen umgedreht werden.

$$-1/2 x \geq 5 \mid : (-1/2)$$

$$x \leq -10$$

2.3 Funktionen als eindeutige Zuordnungen

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung. Dafür muss gelten: Jedem Element der Definitionsmenge D wird genau ein Element der Wertemenge W zugeordnet.



$$D = \{-1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\} \quad W = \{-1 ; 0 ; 1 ; 2\}$$

Auf jeder Parallelen zur y -Achse darf höchstens ein Punkt liegen.

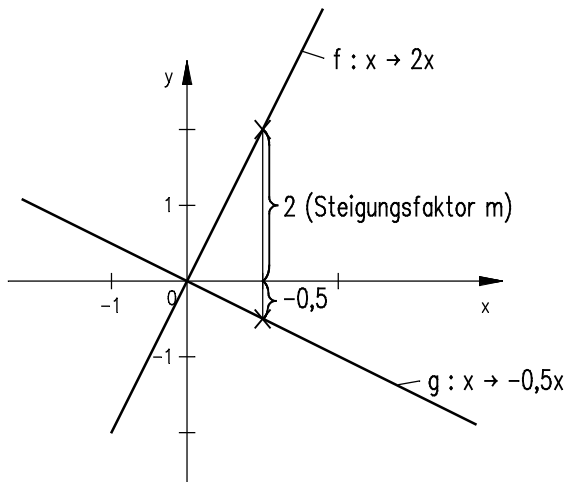
Bezeichnungen für Funktionen:

$f: x \rightarrow 2x$; $2x$ wird Funktionsterm genannt.

$f: 2 \rightarrow 4$; Der Funktionswert von f an der Stelle 2 ist 4: $f(2) = 4$

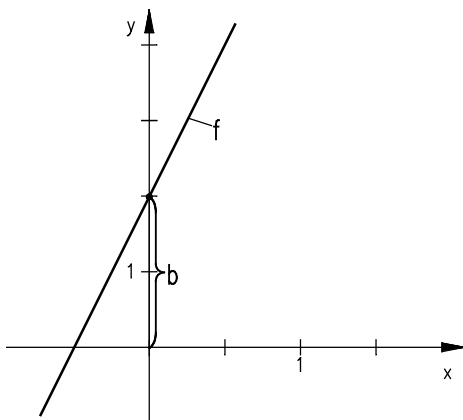
$f(x) = 2x$; Funktionsgleichung

2.3.1 Funktion einer Geraden



Der Graf einer Funktion $f: x \rightarrow mx$ ist eine Gerade durch den Ursprung.

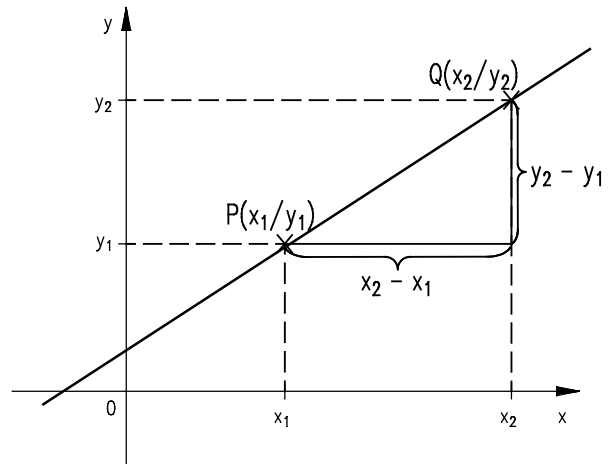
Der Graf einer linearen Funktion mit $f(x) = mx + b$ ist eine um b nach oben ($+b$) oder unten ($-b$) verschobene Ursprungsgerade.



Berechnung des Steigungsfaktors m einer Geraden aus zwei Punkten

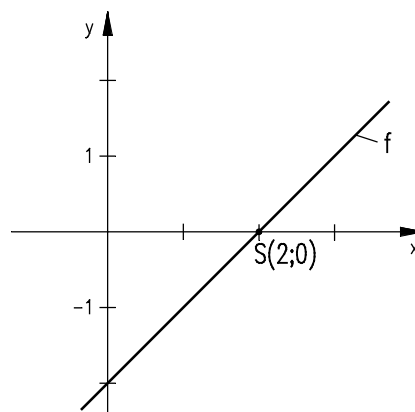
Steigungsfaktor m :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

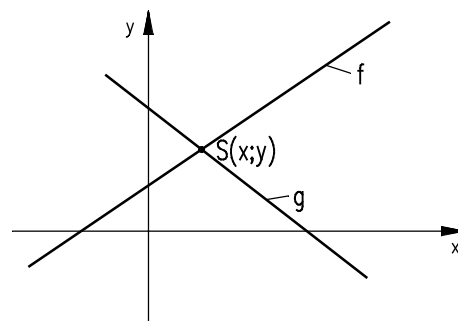


2.3.2 Nullstellen einer Geraden und Schnittpunkte zweier Geraden

$$f(x) = x - 2$$



Der Schnittpunkt S des Graphen von f mit der x -Achse hat die Koordinaten $S(x; 0)$. Die x -Koordinate von S wird Nullstelle der Funktion f genannt.



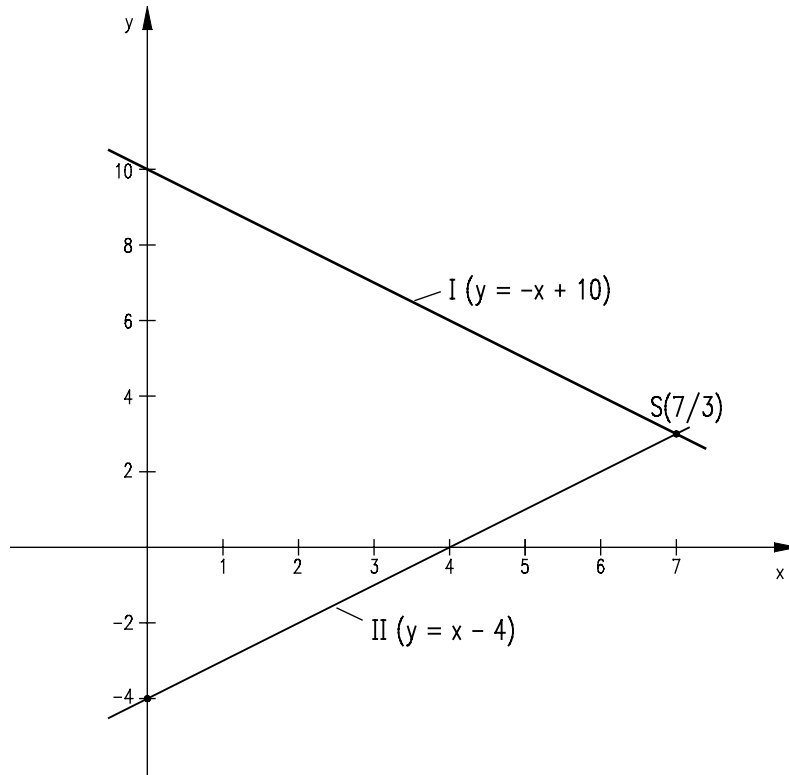
Für den Schnittpunkt der beiden Geraden gilt: $f(x) = g(x)$.

2.3.3 Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen bilden ein lineares Gleichungssystem.

I $x + y = 10$

II $x - y = 4$



Der Schnittpunkt $S(x; y)$ erfüllt beide Funktionsgleichungen; seine Koordinaten sind Lösung des Gleichungssystems.

Rechnerische Lösungsverfahren

2.3.3.1 Gleichsetzungsverfahren

Im ersten Lösungsschritt werden beide Gleichungen in die Normalform $y = mx + b$ umgeformt. Im zweiten Lösungsschritt werden beide Gleichungsterme gleich gesetzt und die Gleichung nach x aufgelöst. Im dritten Lösungsschritt wird der x -Wert in eine der beiden Gleichungen eingesetzt.

2.3.3.2 Einsetzungsverfahren

Im ersten Lösungsschritt wird Gleichung I oder II nach y aufgelöst. Im zweiten Lösungsschritt wird der Term für y in die andere Gleichung eingesetzt und diese nach x aufgelöst. Im dritten Lösungsschritt wird der x -Wert in den y -Term eingesetzt.

2.3.3.3 Additionsverfahren

Im ersten Lösungsschritt müssen eine oder beide Gleichungen so umgeformt werden, dass bei anschließender Addition beider Gleichungen eine Variable heraus fällt. Im zweiten Lösungsschritt wird der berechnete x -Wert (oder y -Wert) in eine der beiden Ausgangsgleichungen eingesetzt und die zweite Variable bestimmt.

2.3.4 Umkehrfunktionen

Jeder x-Wert führt bei einer linearen Funktion zu einem bestimmten y-Wert. Jeder y-Wert ist auch eindeutig einem bestimmten x-Wert zugeordnet. Diese Eigenschaft einer linearen Funktion $f(x)$ nennt man umkehrbar eindeutig.

Ihre Definitionsmenge ist D_f , ihre Wertemenge W_f . Die Funktion $f^{-1} : f(x) \rightarrow x$ mit $D(f^{-1}) = W_f$ und $W(f^{-1}) = D_f$ heißt Umkehrfunktion.

$$y = 1/2 x - 4$$

Erster Lösungsschritt: nach x auflösen

$$y + 4 = 1/2 x \quad | : 1/2$$

$$2 y + 8 = x$$

Zweiter Lösungsschritt: x und y vertauschen

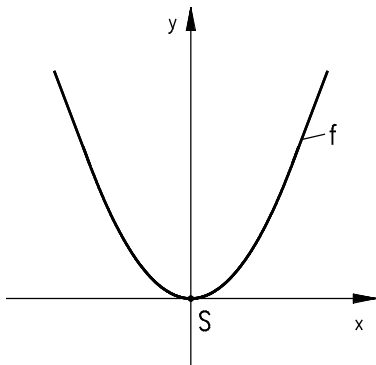
$$2 x + 8 = y$$

$$f^{-1} : y = 2 x + 8$$

3 Funktionen und Gleichungen höherer Ordnung

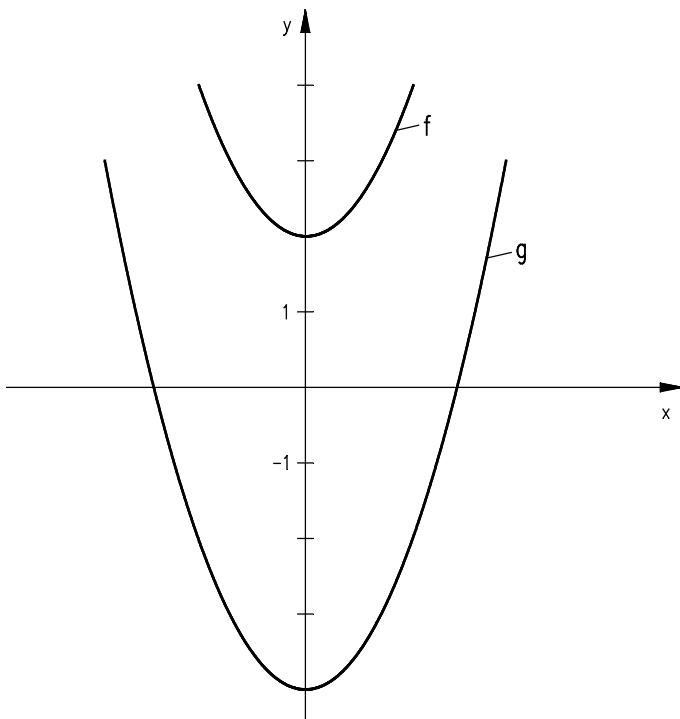
3.1 Parabeln

Der Graf der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$; $D = \mathbb{R}$ heißt Normalparabel. S ist der Scheitelpunkt der Parabel. Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle. Die Normalparabel ist nach oben geöffnet.



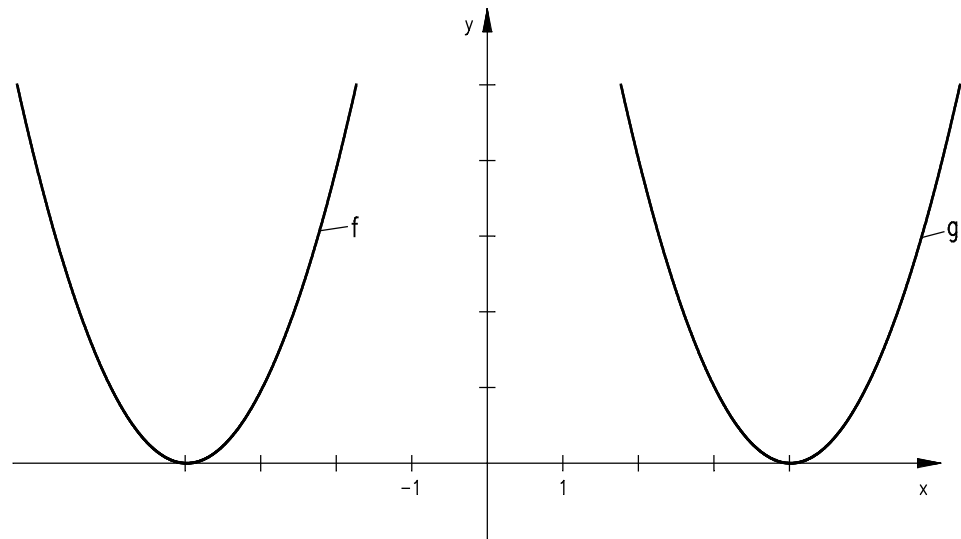
Der Graf einer quadratischen Funktion mit der Funktionsgleichung $y = x^2 + s$ ist eine in Richtung der y-Achse verschobene Normalparabel. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(0; s)$.

$$f(x) = x^2 + 2 \quad g(x) = x^2 - 4$$



Der Graf einer quadratischen Funktion mit der Funktionsgleichung $y = (x - r)^2$ ist eine in Richtung der x-Achse verschobene Normalparabel. Der Scheitelpunkt lautet: $S(r; 0)$

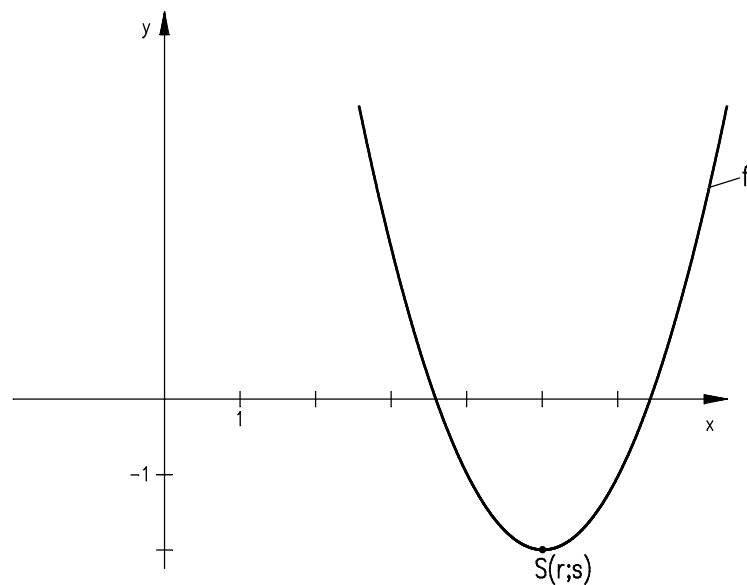
$$f(x) = (x + 4)^2 \quad g(x) = (x - 4)^2$$



Der Graf einer Funktion mit der Funktionsgleichung $y = (x - r)^2 + s$ ist eine verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(r; s)$.

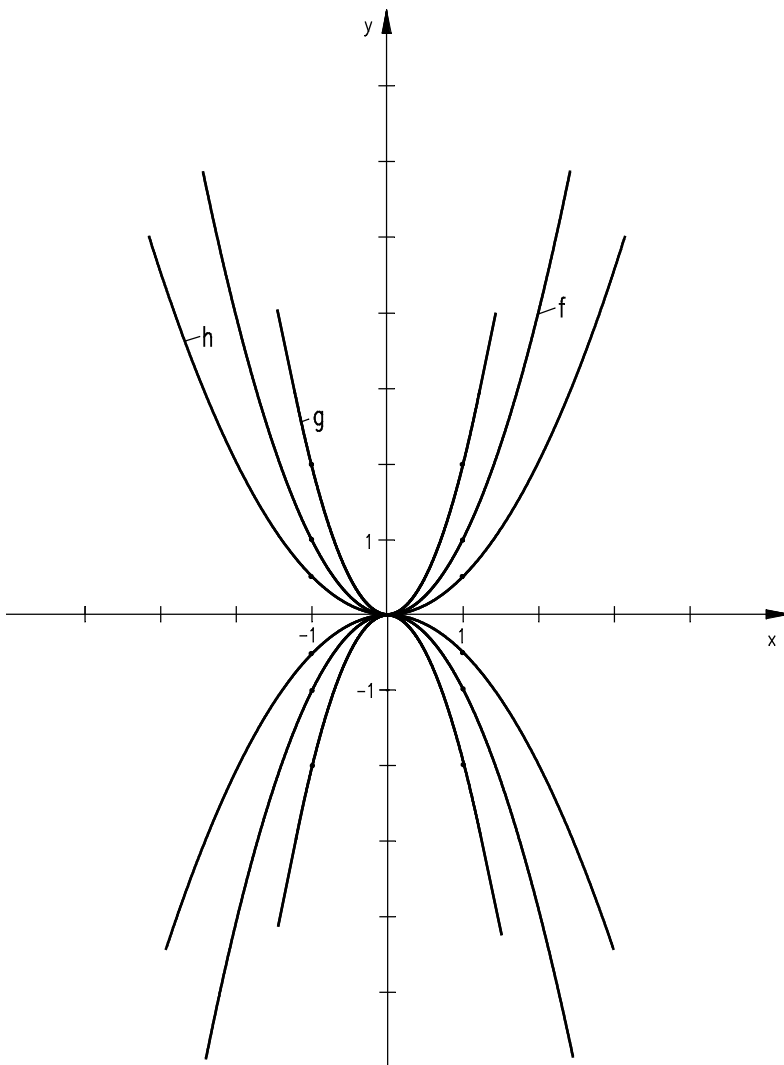
$$f(x) = (x - 5)^2 - 2$$

Diese Darstellung einer quadratischen Funktion heißt Scheitelpunktform.



Der Graf einer quadratischen Funktion mit $f(x) = ax^2$ ($a < 0$) ist eine nach unten geöffnete Parabel. Die Grafen sind jeweils an der x-Achse gespiegelt.

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = ax^2 \text{ mit } a > 1 \quad h(x) = ax^2 \text{ mit } 0 < a < 1$$



3.2 Die allgemeine quadratische Funktion

Die allgemeine Form einer quadratischen Funktion lautet: $y = ax^2 + bx + c$. Die Formvariablen a und b heißen Koeffizienten der quadratischen Funktion.

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x - 4 \\ f(x) &= 2(x^2 - 4x) - 4 \\ f(x) &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4 \\ f(x) &= 2(x^2 - 4x + 4) - 8 - 4 \\ f(x) &= 2(x - 2)^2 - 12 \end{aligned}$$

Eine quadratische Funktion hat entweder eine Nullstelle, zwei Nullstellen oder keine Nullstelle.

3.3 Quadratische Gleichungen und deren Lösung

3.3.1 Quadratische Gleichung der Form $y = x^2 + q$

Eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + q$ hat

$$\text{für } q < 0 \text{ zwei Lösungen: } x_1 = \sqrt{q} \quad x_2 = -\sqrt{q} \quad L = \{\sqrt{q}; -\sqrt{q}\}$$

$$\text{für } q = 0 \text{ eine Lösung: } x = 0 \quad L = \{0\}$$

$$\text{für } q > 0 \text{ keine Lösung: } L = \{ \}$$

3.3.2 Quadratische Gleichung der Form $y = x^2 + px$

Eine quadratische Gleichung der Form $y = x^2 + px$ hat zwei Lösungen:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -p \quad L = \{0; -p\}$$

3.3.3 Allgemeine quadratische Gleichung der Form $y = x^2 + px + q$

Lösung mithilfe der quadratischen Ergänzung

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = 12$$

$$x^2 - 4x + 4 = 12 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 16$$

$$x - 2 = \sqrt{16} \vee x - 2 = -\sqrt{16}$$

$$x_1 = 6 \quad x_2 = -2$$

$$L = \{6; -2\}$$

Lösung mithilfe der Lösungsformel

$$x^2 + px + q = 0 \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = -p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q} \quad x_2 = -p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q}$$

Der Radikand $(p/2)^2 - q$ heißt Diskriminante D .

Ist $D > 0$: Es existieren zwei Lösungen $L = \{x_1; x_2\}$

Ist $D = 0$: Es existiert eine Lösung $L = \{x\}$

Ist $D < 0$: Es existiert keine Lösung $L = \{ \}$

3.3.4 Quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.3.5 Satz von Vieta

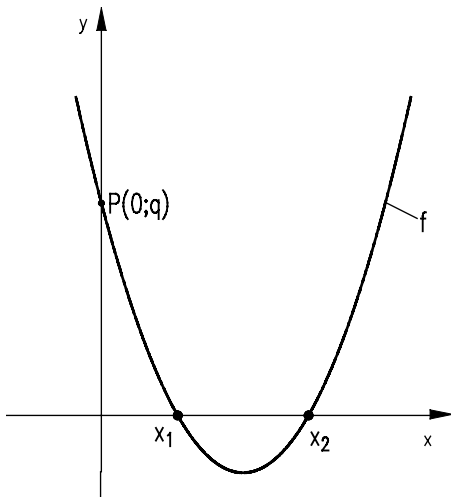
Für quadratische Gleichungen in der Normalform $x^2 + px + q = 0$ gilt für die Lösungen x_1 und x_2 :

$$p = -(x_1 + x_2) \quad q = x_1 \cdot x_2$$

3.4 Schnittpunkte von Parabeln mit anderen Grafen

3.4.1 Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems

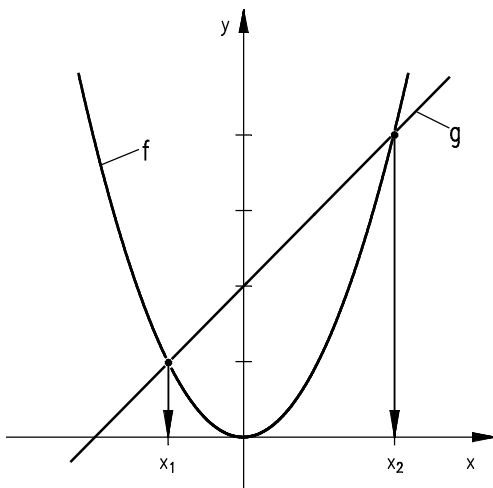
Die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit $f(x) = x^2 + px + q$ mit der x-Achse sind die Nullstellen x_1 und x_2 . Die Bedingung für die Nullstellen lautet: $f(x) = 0$. Die Bedingung für den Schnittpunkt mit der y-Achse lautet: $x = 0$.



3.4.2 Schnittpunkte einer Normalparabel mit einer Geraden

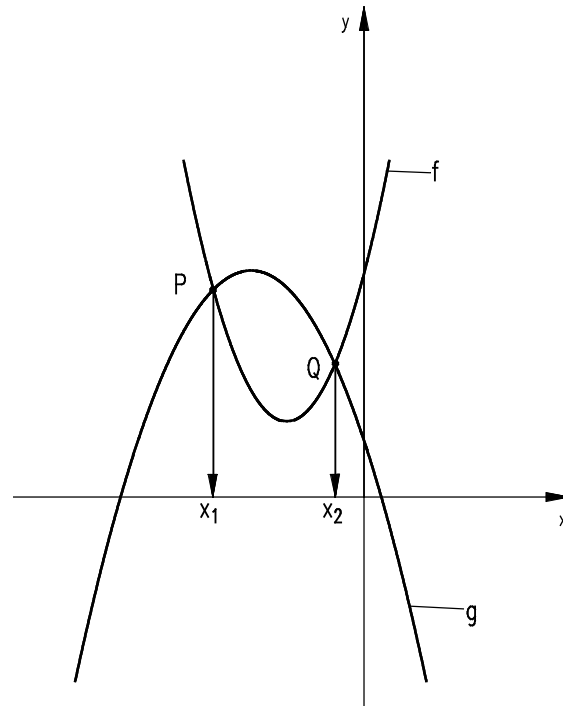
Grafisches Lösungsverfahren zur Schnittpunktbestimmung einer quadratischen Funktion mit $f(x) = x^2 + px + q$

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad f(x) = x^2 \quad g(x) = x + 2$$



3.4.3 Schnittpunkte von zwei Parabeln

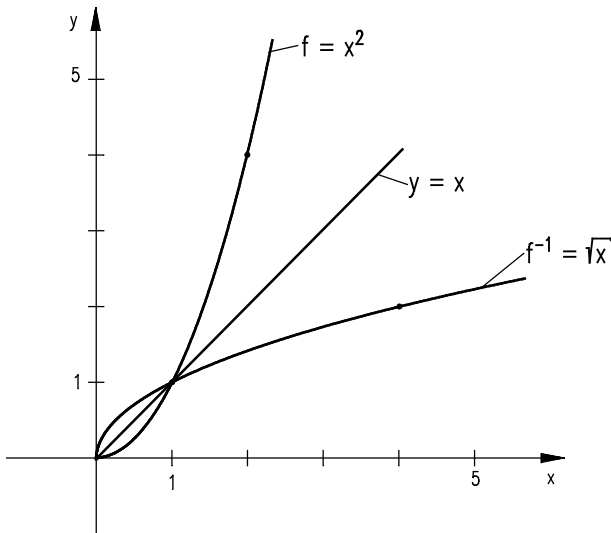
Für die Schnittpunkte P und Q muss gelten: $f(x) = g(x)$



3.5 Wurzelfunktionen

Die Umkehrung der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$ ist eindeutig für $D = \mathbb{R}_+$. Die Umkehrfunktion von f heißt Wurzelfunktion :

$$f^{-1} = \sqrt{x} \quad \text{mit } D = \mathbb{R}_+, W = \mathbb{R}_+.$$



Tritt in einer Gleichung die Lösungsvariable im Radikanden einer Wurzel auf, so wird die Gleichung als Wurzelgleichung bezeichnet.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+4} &= 4 \\ (\sqrt{x+4})^2 &= 4^2 \\ x+4 &= 16 \\ x &= 12\end{aligned}$$

Beidseitiges Quadrieren einer Gleichung ist keine Äquivalenzumformung. Bei Wurzelgleichungen ist immer eine Probe durch zu führen.

3.6 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

Ein Produkt aus gleichen Faktoren kann verkürzt als Potenz geschrieben werden.

$$a^n \quad (a \text{ heißt Basis, } n \text{ heißt Exponent}), a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$$

Bei negativer Basis und geradem Exponenten ist der Wert der Potenz positiv.

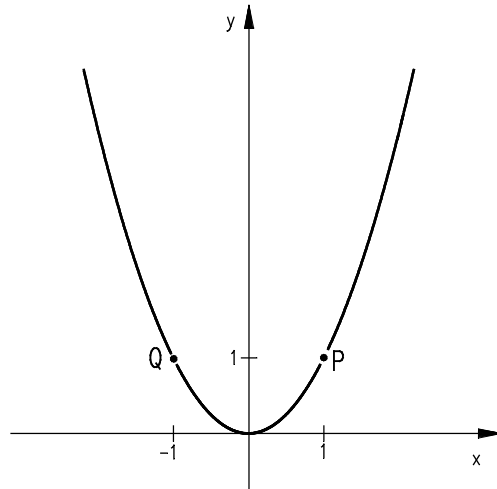
$$(-2)^2 = +4$$

Bei negativer Basis und ungeradem Exponenten ist der Wert der Potenz negativ.

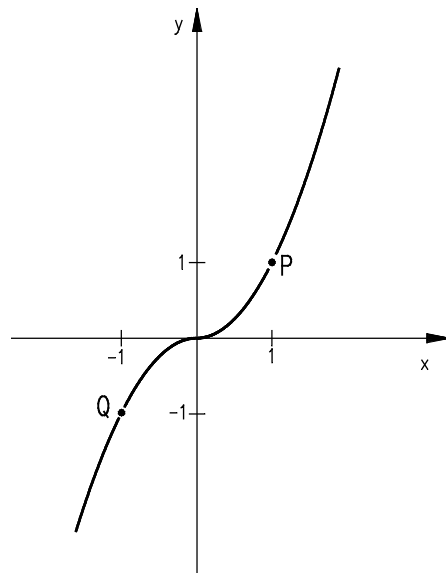
$$(-3)^3 = -27$$

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ heißt Potenzfunktion, $D = \mathbb{R}$.

Die Grafen der Potenzfunktionen mit geradem Exponenten $y = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ und $D = \mathbb{R}$ verlaufen durch die Punkte P (1 ; 1) und Q (-1 ; 1). Die y-Achse ist Symmetrieachse.



Die Grafen der Potenzfunktionen mit ungeradem Exponenten $y = x^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ und $D = \mathbb{R}$ verlaufen durch die Punkte P (1 ; 1) und Q (-1 ; -1). Der Ursprung (0 ; 0) ist Symmetriepunkt.



3.7 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzen mit gleichen Basen und gleichen Exponenten können in Summen und Differenzen zusammengefasst werden.

$$3 a^4 + 4 a^4 = 7 a^4$$

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem ihre Exponenten addiert werden. Die Basis wird beibehalten.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ für } a \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Beispiel: } a^5 \cdot a^2 = a^7$$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem ihre Exponenten subtrahiert werden. Die Basis wird beibehalten.

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{ für } a \in \mathbb{R}^*; m, n \in \mathbb{N} \text{ und } m > n$$

$$\text{Beispiel: } a^5 : a^3 = a^2$$

Wenn Zähler und Nenner eines Bruches gleich sind, so bezeichnet der Bruch die Zahl 1. So gilt:

$$a^0 = 1 \text{ für } a \in \mathbb{R}^*$$

Ein Produkt wird mit einer natürlichen Zahl potenziert, indem jeder Faktor des Produktes mit der natürlichen Zahl potenziert wird.

$$(a b)^n = a^n b^n \text{ für } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Beispiel: } (3b)^3 = 3^3 b^3 = 27 b^3$$

Ein Bruch wird mit einer natürlichen Zahl potenziert, indem Zähler und Nenner des Bruches jeweils mit der natürlichen Zahl potenziert werden.

$$(a / b)^n = a^n / b^n \text{ für } a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Beispiel: } (3 / b)^4 = 81 / b^4 \quad b \neq 0$$

Eine Potenz wird potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden. Die Basis bleibt unverändert.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \text{ für } a \in \mathbb{R} \text{ und } m, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Beispiel: } (2^3)^2 = 2^6 = 64$$

Potenzschreibweise mit negativen Exponenten

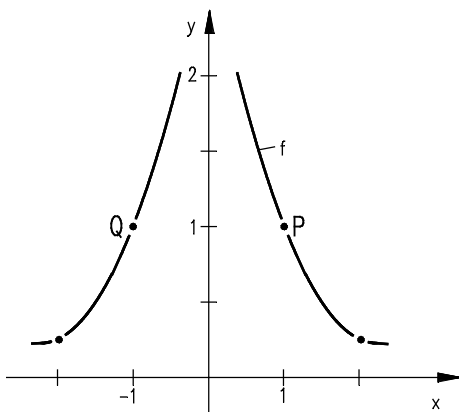
$$1 / a^n = a^{-n} \text{ für } a \in \mathbb{R}^* \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Beispiel: } 1 / 2^2 = 2^{-2} = 1/4$$

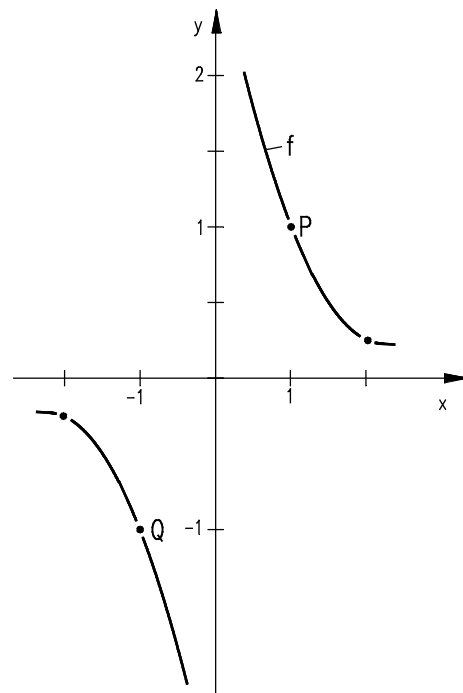
$$(a / b)^{-n} = (b / a)^n \text{ für } a, b \in \mathbb{R}^* \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ und } a \neq 0, b \neq 0$$

$$\text{Beispiel: } (2/3)^{-4} = (3/2)^4 = \frac{81}{16}$$

Die Grafen der Potenzfunktionen mit $y = x^{-2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ und $D = \mathbb{R}^*$ verlaufen durch die Punkte P (1 ; 1) und Q (-1 ; 1). Die y-Achse ist die Symmetrieachse.



Die Grafen der Potenzfunktionen mit $y = x^{-2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ und $D = \mathbb{R}^*$ verlaufen durch die Punkte $P(1; 1)$ und $Q(-1; -1)$. Der Ursprung $(0; 0)$ ist Symmetriepunkt.



3.8 Potenzen mit rationalen Exponenten

$\sqrt[n]{a}$ ist die nichtnegative Zahl, die mit n potenziert a ergibt. n heißt Wurzelexponent, a heißt Radikand.

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \text{ für } a \in \mathbb{R}_+ \text{ und } n \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt[5]{10} = 10^{1/5}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \text{ für } a \in \mathbb{R}_+ \text{ und } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \quad 5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2$$

Für Potenzen mit rationalen Exponenten gelten die selben Gesetze wie für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.

$$\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[4]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[4]{a^5}$$

$$\sqrt[3]{b^2} : \sqrt[3]{b^4} = \sqrt[3]{\frac{b^2}{b^4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{b^2}}$$

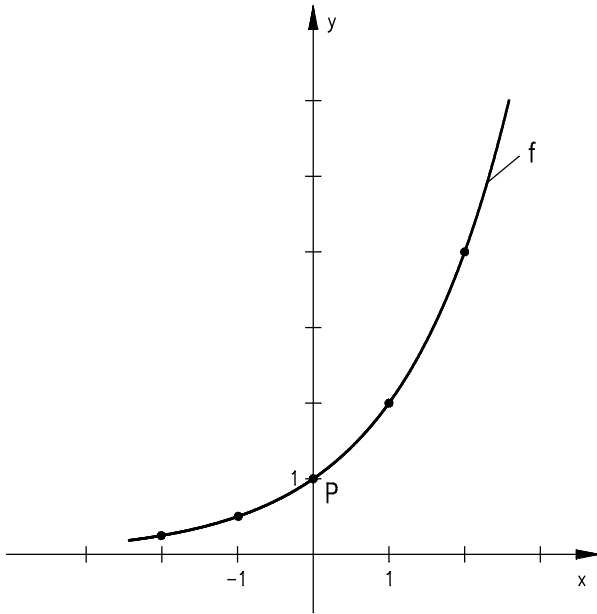
$$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4 = \sqrt[3]{a^8}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$$

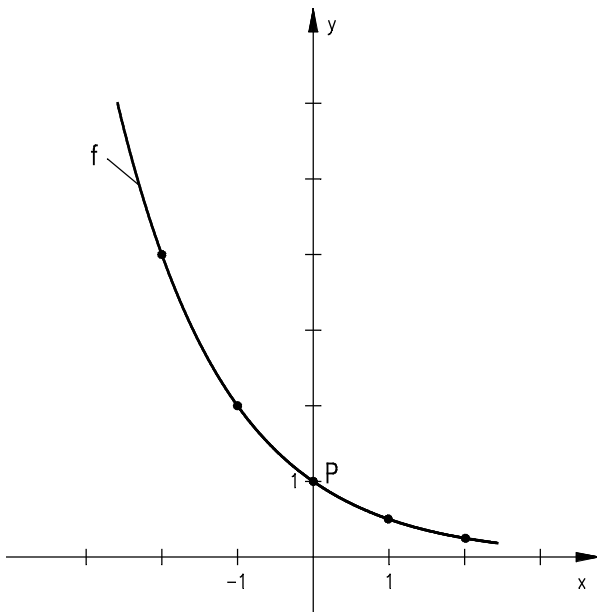
3.9 Exponentialfunktionen

Eine Funktion $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ heißt Exponentialfunktion. Ihre Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}$. Für $a \neq 1$ ist $W = \mathbb{R}_+$.

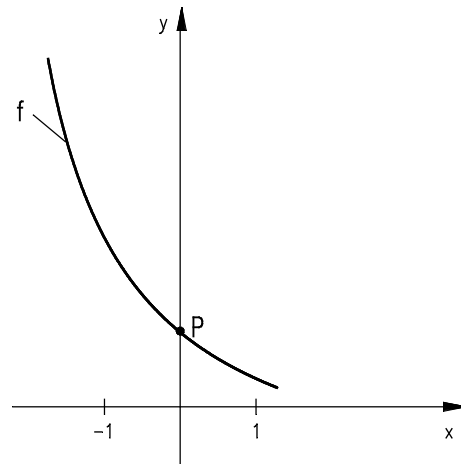
Die Grafen der Exponentialfunktionen mit $f(x) = a^x$ mit $a > 1$ verlaufen durch den Punkt $P(0; 1)$. Die Grafen haben keinen Schnittpunkt mit der x-Achse. Sie steigen monoton.



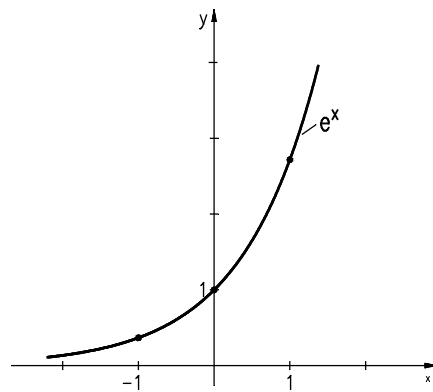
Die Grafen der Exponentialfunktionen mit $f(x) = a^x$ mit $a < 1$ verlaufen durch den Punkt $P(0; 1)$. Die Grafen haben keinen Schnittpunkt mit der x-Achse. Die Grafen fallen monoton.



Funktionsgrafen der Funktionsgleichung $f(x) = ka^x$ schneiden die y-Achse in P (0 ; k).



Die Exponentialfunktion mit der Eulerschen Zahl e als Basis heißt natürliche Exponentialfunktion oder natürliche Wachstumsfunktion. ($e \approx 2,718281$)



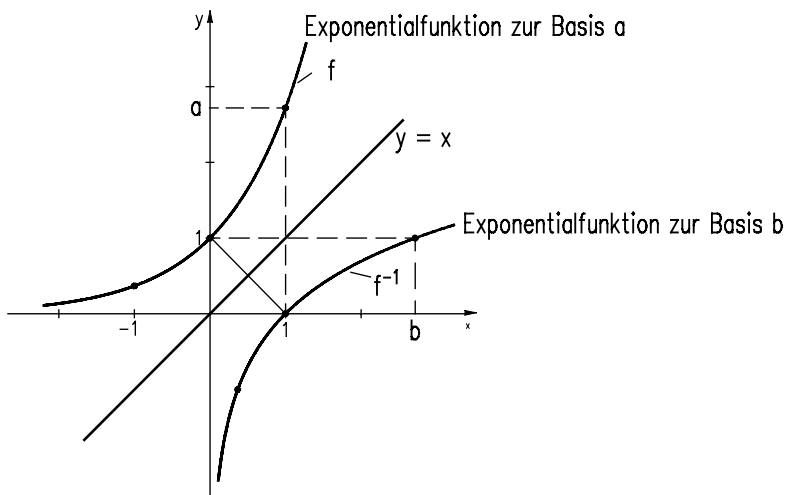
3.10 Logarithmenfunktionen

Der Logarithmus von b zur Basis a ($\log_a b$) ist der Exponent, mit dem die Basis a potenziert werden muss, um b zu erhalten. Im Term $\log_a b$ heißt b Numerus.

$$\log_2 8 = 3, \text{ denn } 2^3 = 8$$

Die Funktion $x \rightarrow \log_a x$, $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0; 1\}$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis a .

Sie ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0; 1\}$
 $D = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$; $W = \mathbb{R}$.



Beispiele für Logarithmusfunktionen:

Logarithmen zur Basis 2 : \log_2 (kurz: ld oder lb)

Logarithmen zur Basis e : \log_e (kurz: ln)

Logarithmen zur Basis 10 : \log_{10} (kurz: lg)

Der Logarithmus zu jeder beliebigen Basis kann mithilfe der Zehnerlogarithmen berechnet werden.

$$\log_a x = \lg x / \lg a$$

Logarithmengesetze

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a (x_1 / x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

$$x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \quad a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0; 1\} \quad n \in \mathbb{R}$$

3.11 Exponentialgleichungen

Tritt in einer Gleichung die Lösungsvariable im Exponenten einer Potenz auf, heißt die Gleichung transzendent.

$$a^x = b$$

$$x \lg a = \lg b$$

$$x = \lg b / \lg a$$

Summen können nicht logarithmiert werden, es muss zunächst die Summe beseitigt werden.

$$2^{x+1} + 2^{x+2} = 3$$

$$2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 4 = 3$$

$$2^x \cdot 6 = 3$$

$$2^x = 1/2$$

$$x \lg 2 = \lg 1/2$$

Kann die Summe nicht beseitigt werden, wird eine Substitution durchgeführt.

$$3^x + 3^{1-x} = 4$$

$$3^x + \frac{3}{3^x} = 4 \quad 3^x = u$$

$$u + \frac{3}{u} = 4$$

$$u^2 + 3 - 4u = 0$$

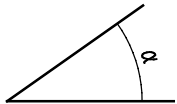
4 Geometrische Gesetze für zwei- und dreidimensionale Figuren

4.1 Planimetrie

4.1.1 Planimetrische Grundbegriffe

Winkel

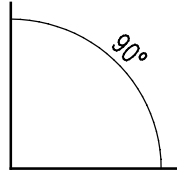
Spitzer Winkel



$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

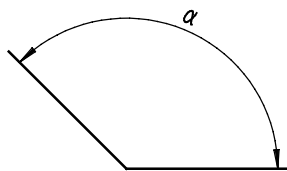
(lies: α liegt zwischen 0° und 90°)

Rechter Winkel



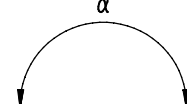
$$\alpha = 90^\circ$$

Stumpfer Winkel



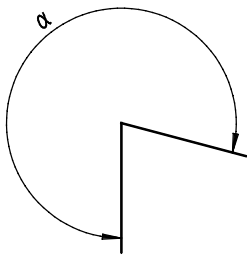
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

Gestreckter Winkel



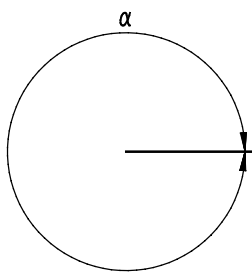
$$\alpha = 180^\circ$$

Überstumpfer Winkel

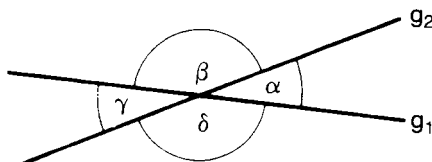


$$180^\circ < \alpha < 360^\circ$$

Voller Winkel oder Vollwinkel

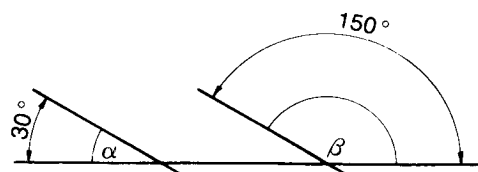


$$\alpha = 360^\circ$$

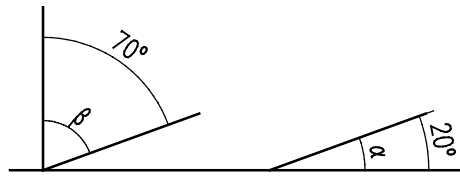


Zwei Winkel, die an der Kreuzung zweier Geraden nebeneinander liegen, heißen **Nebenwinkel**. Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180° .

Zwei Winkel, die an einer Kreuzung zweier Geraden gegenüber liegen, heißen **Scheitelwinkel**. Sie sind gleich groß.

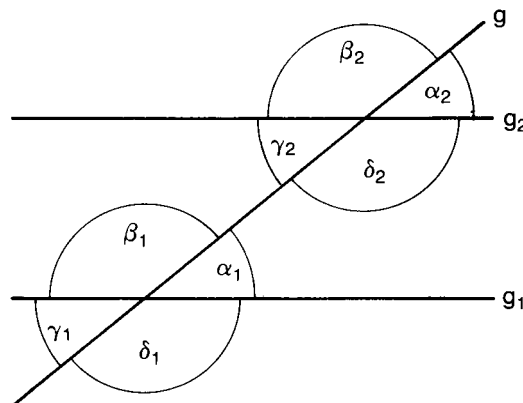


Zwei Winkel, die sich zu 180° ergänzen, heißen **Supplementwinkel**.



Zwei Winkel, die sich zu 90° ergänzen, heißen **Komplementwinkel**.

Winkel an einer Geraden, die von 2 Parallelen geschnitten wird.

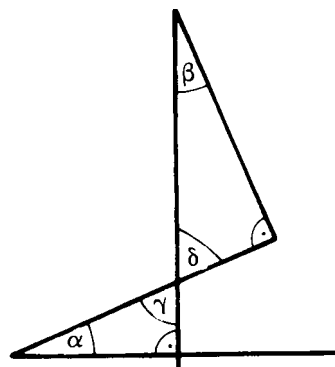


$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \\ \gamma_1 = \gamma_2 \\ \delta_1 = \delta_2 \end{array} \right\}$ heißen **Stufenwinkel**. Sie sind gleich groß.

$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = \gamma_2 \\ \beta_1 = \delta_2 \\ \gamma_1 = \alpha_2 \\ \delta_1 = \beta_2 \end{array} \right\}$ heißen **Wechselwinkel**. Sie sind gleich groß.

$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ und } \delta_2 \\ \beta_1 \text{ und } \gamma_2 \end{array} \right\}$ heißen **Nachbarwinkel**. Sie ergänzen sich zu 180° .

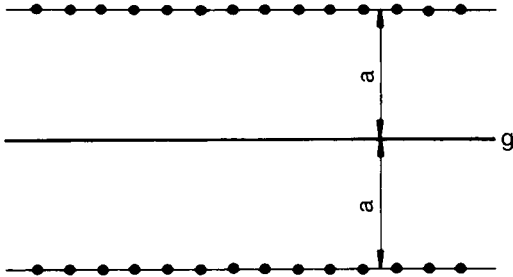
Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind gleich groß oder ergänzen sich zu 180° .



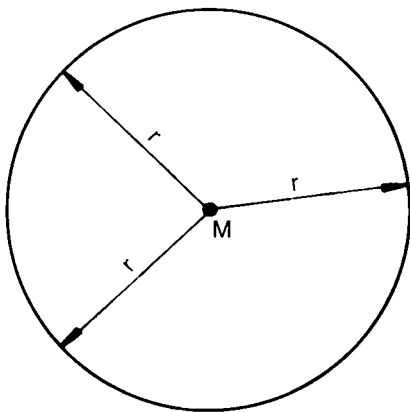
4.1.2 Grundkonstruktionen

Geometrische Örter

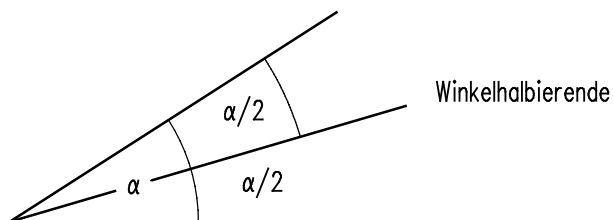
Der geometrische Ort (G.O.) für alle Punkte, die von einer gegebenen Geraden g den gleichen Abstand a haben, ist das Parallelenpaar zu g im Abstand a .



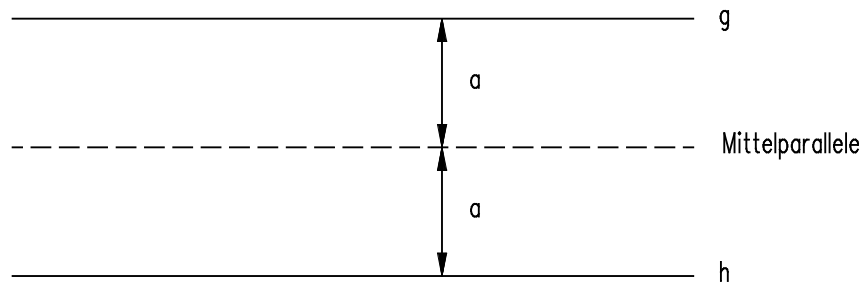
Der geometrische Ort für alle Punkte, die von einem gegebenen Punkt M den Abstand r haben, ist der **Kreis** um M mit Radius r .



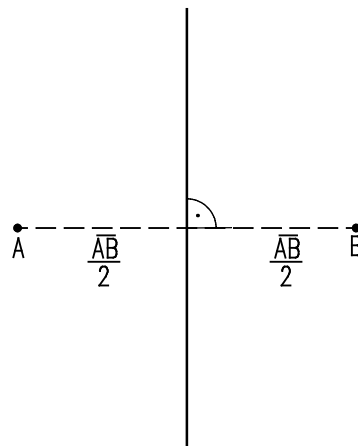
Der geometrische Ort für alle Punkte, die von 2 sich schneidenden Geraden den gleichen Abstand haben, ist die **Winkelhalbierende**.



Der geometrische Ort für alle Punkte, die von 2 parallelen Geraden den gleichen Abstand haben, ist die **Mittelparallele**.



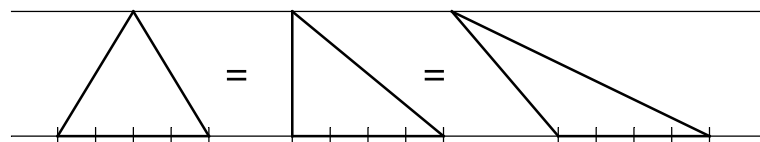
Der geometrische Ort für alle Punkte, die von zwei Punkten A, B gleichen Abstand haben, ist die **Mittelsenkrechte** auf $[A,B]$.



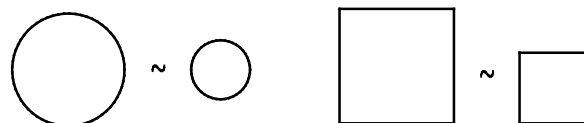
Kongruenzabbildungen

Gleichheit – Ähnlichkeit – Kongruenz

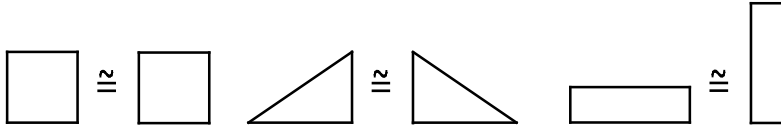
Zwei Figuren sind dann **gleich** ($=$), wenn Ihre Flächen gleich groß sind, d.h. „gleich“ bedeutet „flächengleich“.



Zwei Figuren sind einander **ähnlich** (\sim), wenn sie in ihrer Form übereinstimmen.



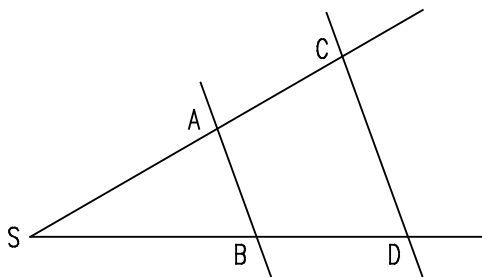
Zwei Figuren sind **kongruent** (\cong), wenn sie in Größe und Form übereinstimmen.



Achsenspiegelung, Parallelverschiebung und Drehung erzeugen kongruente Flächen.

4.1.3 Ähnlichkeit

Strahlensätze



Ist $AB \parallel CD$, so gilt

Erster Strahlensatz:

$$\overline{SA} : \overline{AC} = \overline{SB} : \overline{BD}$$

$$\overline{SA} : \overline{SC} = \overline{SB} : \overline{SD}$$

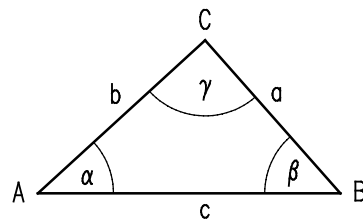
Zweiter Strahlensatz:

$$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{SA} : \overline{SC}$$

$$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{SB} : \overline{SD}$$

4.1.4 Kongruenzsätze und besondere Linien und Punkte im Dreieck

Bezeichnungen am Dreieck



Einteilung der Dreiecke nach den Seiten

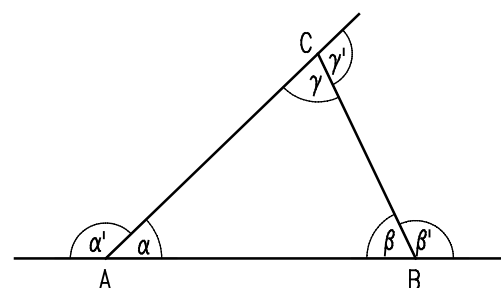
Allgemeines Dreieck	gleichschenkliges Dreieck
<p>$b < a < c$ $\beta < \alpha < \gamma$</p>	<p>$a = b$ $\alpha = \beta$ $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$</p>
gleichseitiges Dreieck	
<p>$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma$</p>	

Einteilung der Dreiecke nach den Winkeln

Spitzwinkliges Dreieck	Rechtwinkliges Dreieck	Stumpfwinkliges Dreieck
<p>$\alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$</p>	<p>$\alpha \text{ oder } \beta \text{ oder } \gamma = 90^\circ$</p>	<p>$\alpha \text{ oder } \beta \text{ oder } \gamma > 90^\circ$</p>

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° .

Die Außenwinkel eines Dreiecks sind jeweils gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.



$$\alpha' = \beta + \gamma$$

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

$$\gamma' = \alpha + \beta$$

In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite und die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte Seite. Außerdem liegt der längsten Seite auch der größte Winkel gegenüber.

Kongruenzsätze

Erster Kongruenzsatz

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen (SSS).

Zweiter Kongruenzsatz

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (SWS).

Dritter Kongruenzsatz

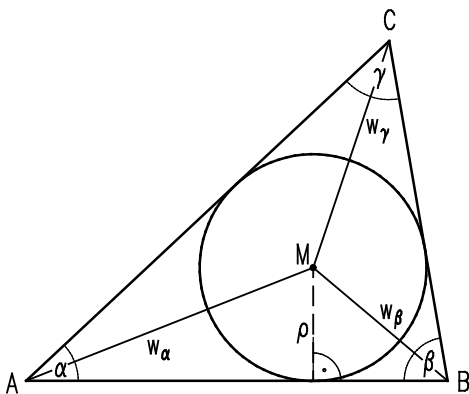
Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen (WSW oder SWW).

Vierter Kongruenzsatz

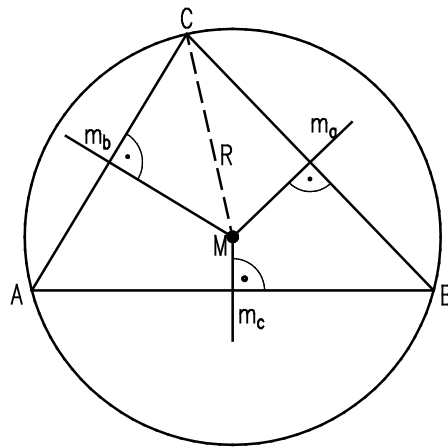
Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem „Gegenwinkel“ der größeren von diesen beiden Seiten übereinstimmen (SsW).

Besondere Linien und Punkte im Dreieck

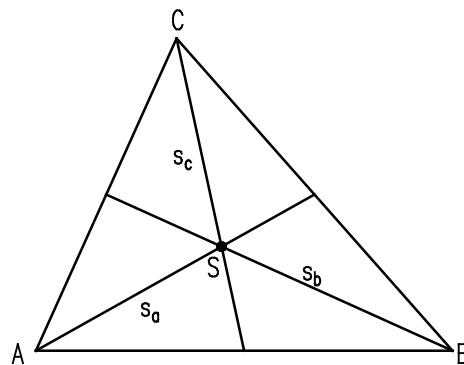
Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem **Inkreismittelpunkt**.



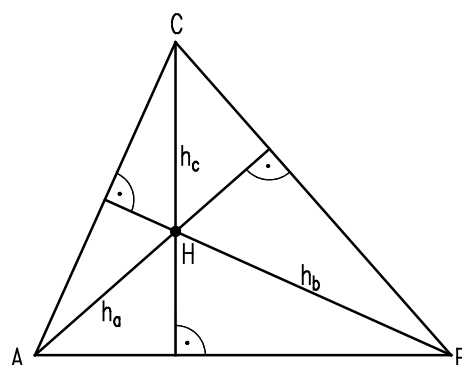
Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem **Umkreis-**
mittelpunkt M.



Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem **Schwer-**
punkt S.

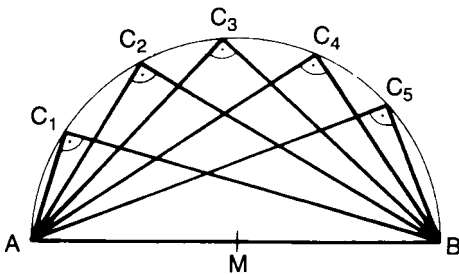


Die Höhen des Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem **Höhenschnittpunkt H**.

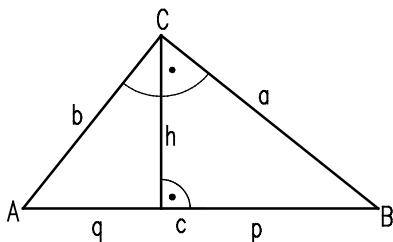


Fläche des Dreiecks

1. $A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$
2. $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $s = \frac{a+b+c}{2}$
3. $A = \rho \cdot s$ mit ρ : Inkreisradius; $s = \frac{a+b+c}{2}$
4. $A = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin \gamma = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \sin \beta$
5. $A = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$

4.1.5 Rechtwinkliges Dreieck**Satz des Thales:**

Liegen die Ecken eines Dreiecks so auf einem Kreis, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, so ist das Dreieck rechtwinklig.



Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

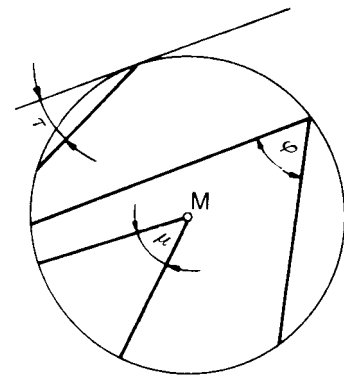
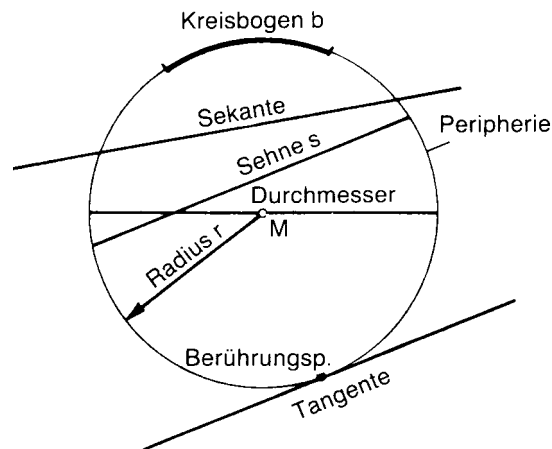
Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$ $b^2 = c \cdot q$

Fläche: $A = \frac{1}{2} c \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b$

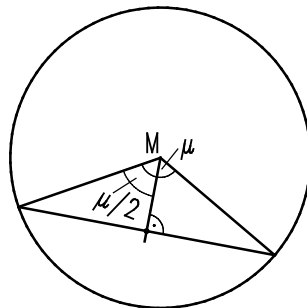
Umkreisradius: $R = \frac{c}{2}$

4.1.6 Kreis und Kreisteile



μ = Zentriwinkel
 φ = Peripheriewinkel
 τ = Sehnen-Tangenten-Winkel

Sehnensätze

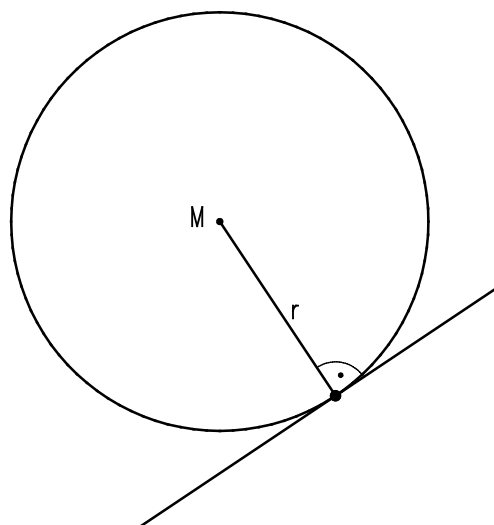


Das Mittellot auf einer Sehne geht durch den Mittelpunkt und halbiert den Zentriwinkel über der Sehne.

Das Lot vom Mittelpunkt auf die Sehne halbiert diese und den zugehörigen Zentriwinkel.

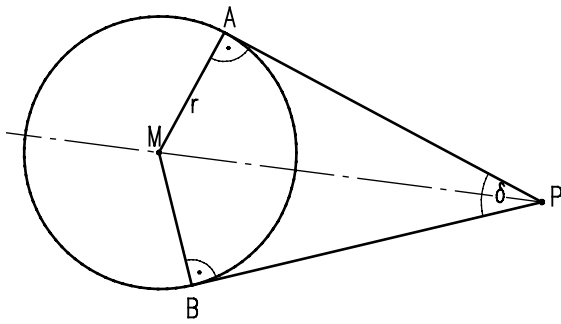
Die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit dem Sehnenmittelpunkt steht senkrecht auf der Sehne und halbiert den zugehörigen Zentriwinkel.

Tangentensätze



Der Radius im Berührungspunkt steht senkrecht auf der Tangente.

Das Lot auf einer Tangente im Berührungspunkt geht durch den Kreismittelpunkt.

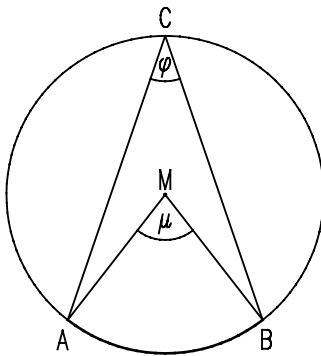


Die von einem Punkt außerhalb eines Kreises an den Kreis gelegten Tangenten sind gleich lang.

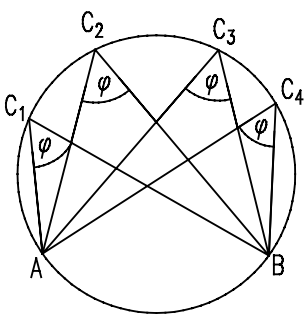
Die Zentrale (Verbindungsline von M mit P) halbiert den Winkel zwischen den von einem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten.

Die Winkelhalbierende des von zwei Tangenten gebildeten Winkels geht durch den Kreismittelpunkt.

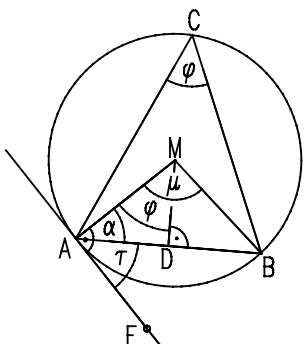
Winkelsätze



Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen.

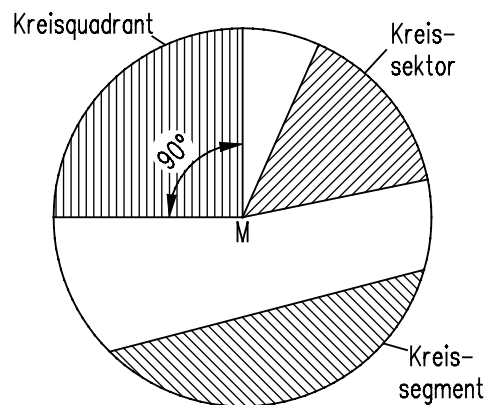


Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen sind gleich groß



Der Sehnen-Tangenten-Winkel ist gleich dem Peripheriewinkel im gegenüberliegenden Kreisabschnitt. $\tau = \varphi$

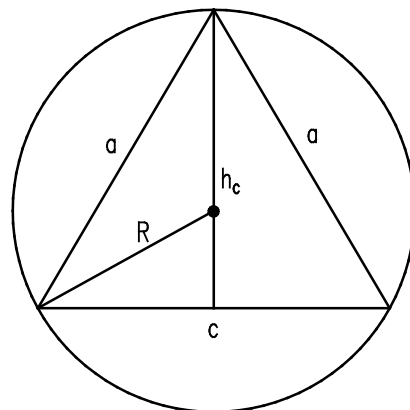
Kreisteile



4.1.7 Flächen- und Umfangsberechnung

Gradlinig begrenzte Flächen (Vielecke)

Gleichschenkliges Dreieck



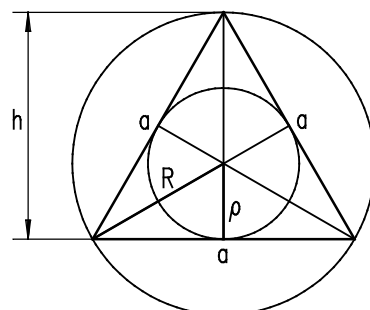
$$A = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$h_c = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$$

$$R = \frac{a^2}{2 \cdot h_c}$$

$$U = 2a + c$$

Gleichseitiges Dreieck



$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$$

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

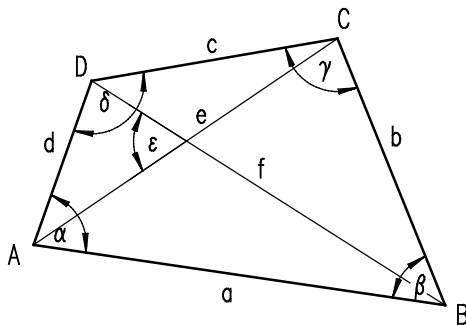
$$A = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

$$R = \frac{a}{3} \sqrt{3}$$

$$U = 3a$$

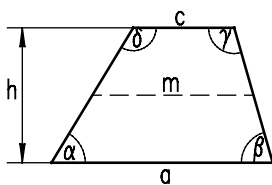
$$\rho = \frac{a}{6} \sqrt{3}$$

Vierecke

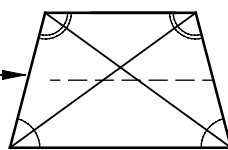


Winkelsumme im n-Eck:

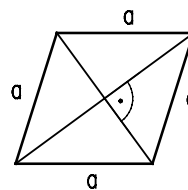
$$(n - 2) \cdot 180^\circ$$



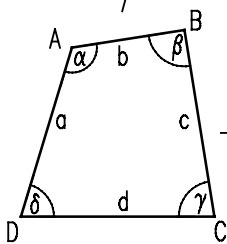
Trapez
1 Paar Gegenseiten parallel
 $\alpha + \delta = 180^\circ$
 $\beta + \gamma = 180^\circ$
 $A = m \cdot h = \frac{a+c}{2} \cdot h$
 $U = a + b + c + d$



gleichschenkliges Trapez
 1) 1 Paar Gegenseiten parallel
 2) 1 Paar Gegenseiten gleich lang
 3) Grundwinkel gleich groß
 4) Diagonalen gleich lang



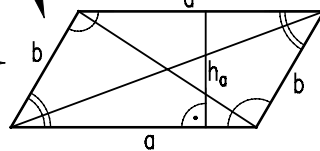
Raute
 1) Alle Seiten gleich lang
 2) Diagonalen stehen senkrecht aufeinander
 3) Diagonalen halbieren den Winkel
 4) Alle Eigenschaften des Parallelogramms
 $U = 4a$



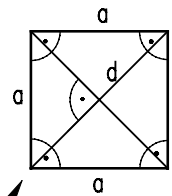
Allgemeines Viereck

$$U = a + b + c + d$$

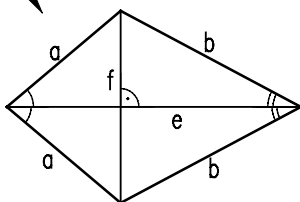
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$



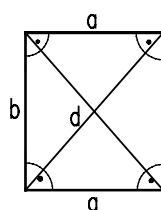
Parallelogramm
 1) Gegenseiten parallel
 2) Gegenseiten gleich lang
 3) Gegenwinkel gleich groß
 4) Diagonalen halbieren sich
 $A = a \cdot h_a$
 $U = 2a + 2b$



Quadrat
 Alle Eigenschaften des Parallelogramms, der Raute und des Dreiecks
 $A = a^2$
 $d = a\sqrt{2}$

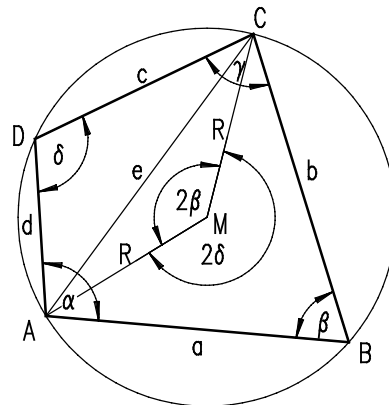


Drachenviereck
 1) Anliegende Seiten gleich lang
 2) Diagonalen stehen senkrecht aufeinander
 3) Kurze Diagonale wird halbiert
 4) Lange Diagonale halbiert die Winkel
 5) 2 Gegenwinkel gleich groß
 $A = \frac{1}{2} ef$
 $U = 2a + 2b$



Rechteck
 1) Alle vier Winkel gleich groß
 2) Diagonalen gleich groß
 3) Alle Eigenschaften des Parallelogramms
 $A = a \cdot b$
 $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

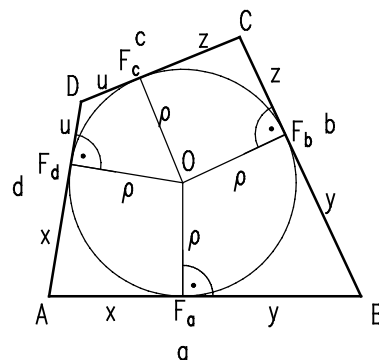
Sehnenvierecke



Sehnenvierecke haben einen Umkreis.

In jedem Sehnenviereck beträgt die Winkelsumme von zwei gegenüberliegenden Winkeln 180° .

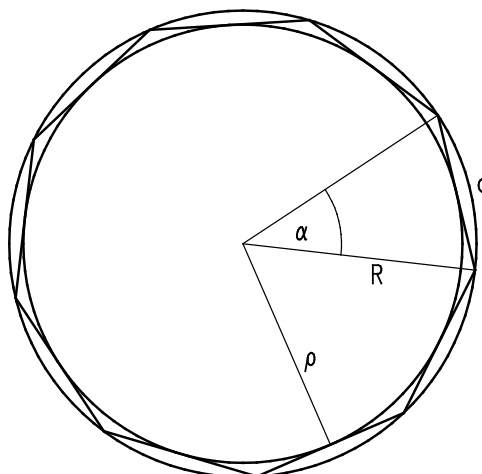
Tangentenvierecke



Tangentenvierecke haben einen Inkreis.

In jedem Tangentenviereck sind die Summen der Gegenseiten gleich.

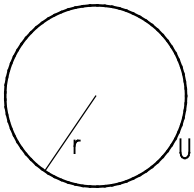
Regelmäßige n-Ecke



$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

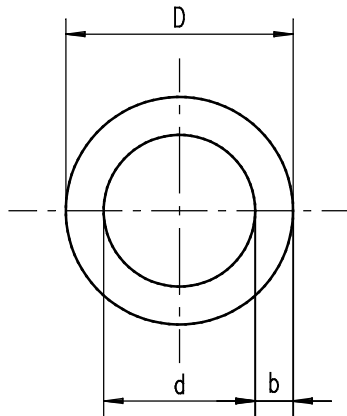
$$a = 2\sqrt{R^2 - \rho^2} = 2R \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}n \cdot a \cdot \rho = \frac{1}{2}nR^2 \cdot \sin \alpha$$

Kreisförmig begrenzte Flächen**Kreis**

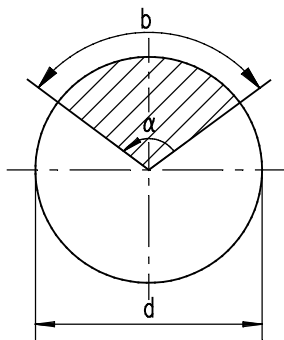
$$U = 2\pi r = \pi d$$

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$$

Kreisring

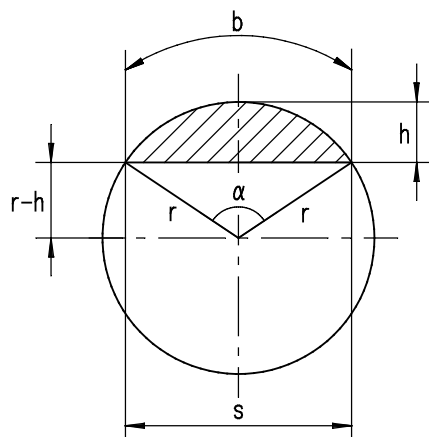
$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

$$b = \frac{D - d}{2}$$

Kreisausschnitt

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$b = \frac{\pi \cdot d \cdot \alpha}{360^\circ}$$

Kreisabschnitt

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2 - \frac{s(r-h)}{2} = \frac{br - s(r-h)}{2}$$

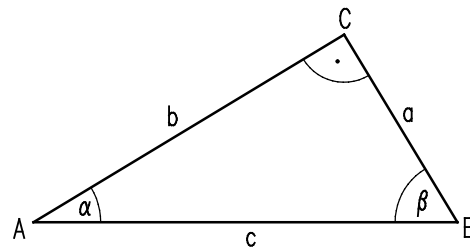
$$s = d \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$h = \frac{d}{2} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

4.2 Trigonometrie

4.2.1 Sinus, Kosinus, Tangens

Im rechtwinkligen Dreieck sind folgende Seitenverhältnisse erklärt:

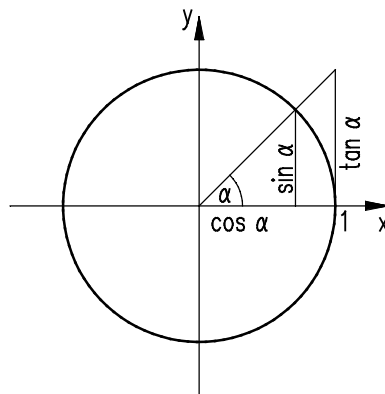


$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \quad (\text{für } \gamma = 90^\circ!)$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} \quad (\text{für } \gamma = 90^\circ!)$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} \quad (\text{für } \gamma = 90^\circ!)$$

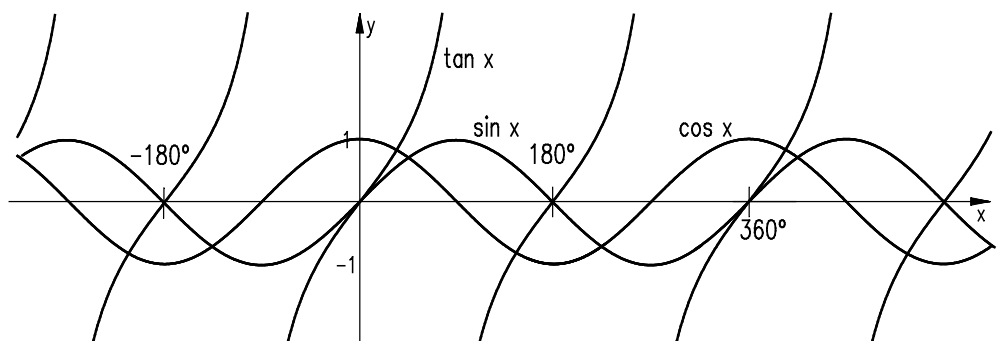
Am Einheitskreis lassen sich folgende Verhältnisse aufstellen:



$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

4.2.2 Trigonometrische Funktionen

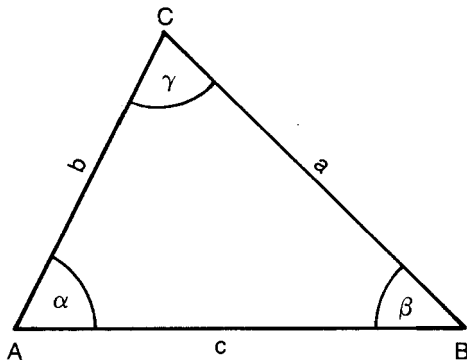


4.2.3 Trigonometrische Berechnung im allgemeinen Dreieck

Berechnung von Winkeln $90^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$ mithilfe der trigonometrischen Funktionen auf Taschenrechnern (α_{TR} = Winkelergebnis vom Taschenrechner)

	φ im		
	II. Quadrant	III. Quadrant	IV. Quadrant
$\sin \alpha$ gegeben, daraus α_{TR} berechnet	$\varphi = 180^\circ - \alpha_{\text{TR}}$	$\varphi = \alpha_{\text{TR}} - 180^\circ $	$\varphi = 360^\circ + \alpha_{\text{TR}}$
$\cos \alpha$ gegeben, daraus α_{TR} berechnet	$\varphi = \alpha_{\text{TR}}$ Die Kosinusfunktion ist hier noch eindeutig	$\varphi = 360^\circ - \alpha_{\text{TR}}$	$\varphi = 360^\circ - \alpha_{\text{TR}}$

Sinussatz



In jedem Dreieck verhalten sich zwei Dreiecksseiten wie die Sinuswerte ihrer gegenüberliegenden Winkel.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Kosinussatz

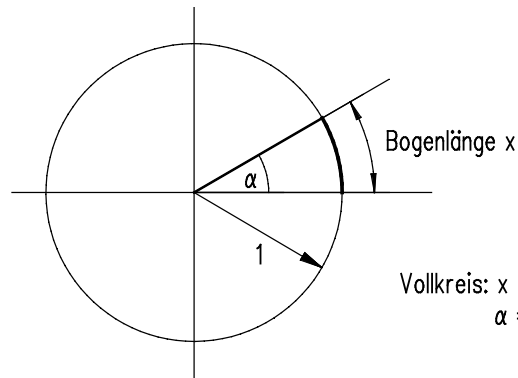
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

Das Quadrat über einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt dieser beiden Seiten und des Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

4.2.4 Darstellung trigonometrischer Funktionen mithilfe des Bogenmaßes der Winkel



allgemein:

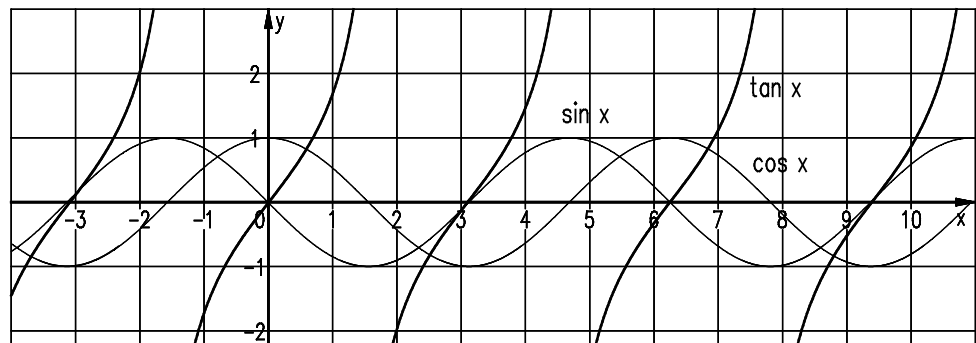
$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot x$$

speziell:

$$\alpha = 60^\circ \Rightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$



4.2.5 Additionstheoreme

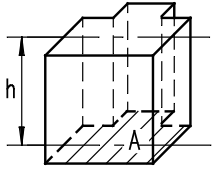
$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$$

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

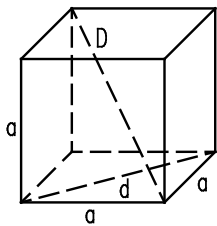
4.3 Stereometrie

4.3.1 Volumen und Oberfläche von Prismen



$$V = A \cdot h$$

Würfel



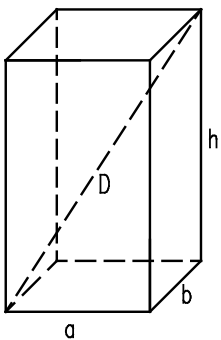
$$V = a^3$$

$$A_O = 6a^2$$

$$D = a\sqrt{3}$$

$$d = a\sqrt{2}$$

Quader



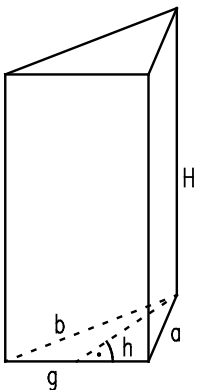
$$V = a \cdot b \cdot h$$

$$A_M = 2h(a + b)$$

$$A_O = 2(ab + bh + ah)$$

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$$

Dreiseitiges Prisma

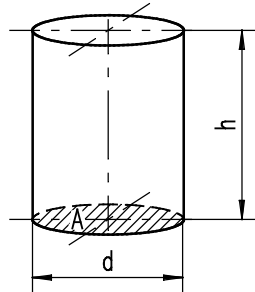


$$V = \frac{1}{2} g \cdot h \cdot H$$

$$A_O = g \cdot h + (g + a + b)H$$

4.3.2 Volumen und Oberfläche von Zylinder, Pyramide und Kegel

Zylinder

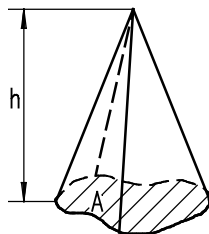


$$V = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

$$A_M = \pi d h = 2 \pi r h$$

$$A_O = \pi d \left(\frac{d}{2} + h \right) = 2 \pi r (r + h)$$

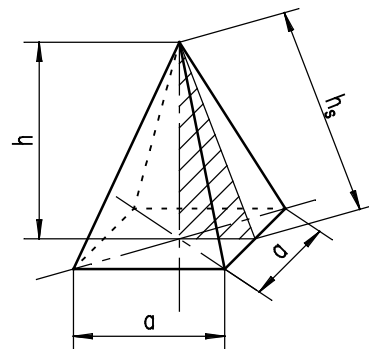
Pyramide und Kegel



$$V = \frac{1}{3} A \cdot h$$

$$A_O = A + A_M$$

Quadratische Pyramide



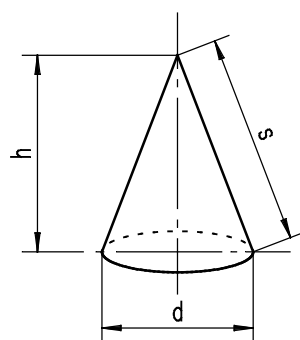
$$V = \frac{a^2 \cdot h}{3}$$

$$h_s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$A_M = 2a \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$A_O = 2a \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} + a^2$$

Kegel



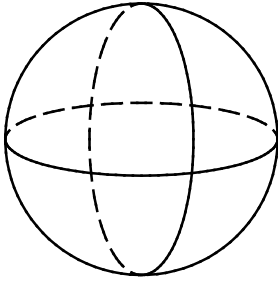
$$V = \frac{\pi}{12} d^2 \cdot h$$

$$s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2}$$

$$A_M = \pi \frac{d}{2} \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2}$$

$$A_O = \pi \frac{d}{2} \left(\sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2} + \frac{d}{2} \right)$$

4.3.3 Volumen und Oberfläche der Kugel



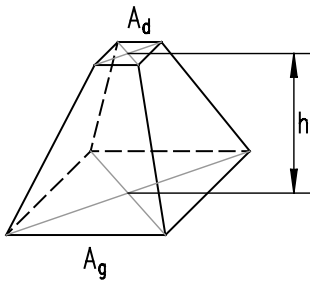
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3$$

$$A_O = \pi d^2$$

$$V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Kegel}} = 3 : 2 : 1$$

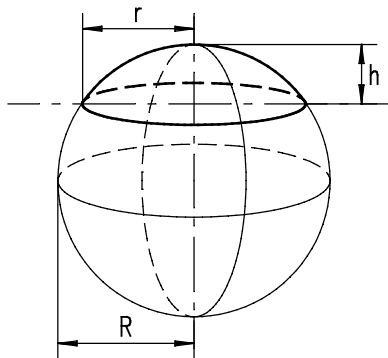
4.3.4 Volumen und Oberfläche von Pyramiden- und Kegelstümpfen

Pyramidenstumpf



$$V = \frac{1}{3} h (A_g + \sqrt{A_g \cdot A_d} + A_d)$$

Kugelabschnitt



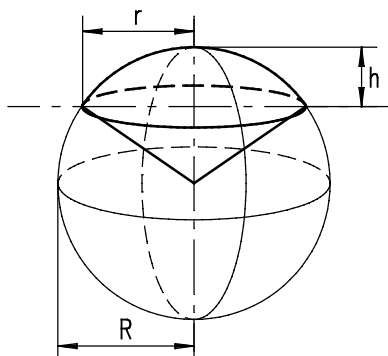
$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$$

$$r = \sqrt{h(2R - h)}$$

$$A_M = 2\pi R \cdot h \quad (\text{Kugelkappe oder Kalotte})$$

$$A_O = \pi (2Rh + r^2)$$

Kugelausschnitt

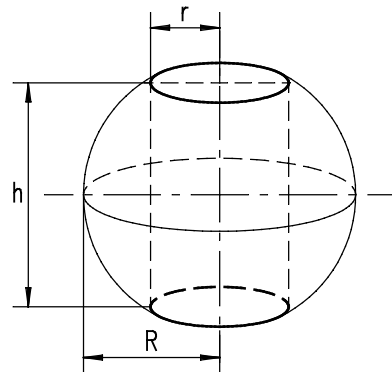


$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot h$$

$$r = \sqrt{h(2R - h)}$$

$$A_O = \pi R (r + 2h)$$

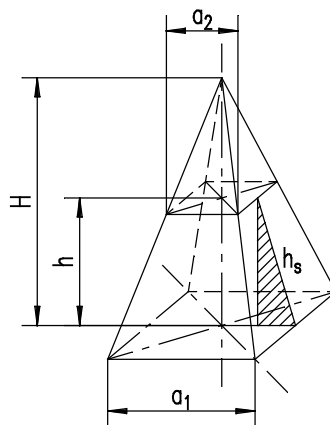
Durchbohrte Kugel



$$V = \frac{\pi}{6} h^3$$

$$A_O = 2\pi \cdot h(R + r)$$

Quadratischer Pyramidenstumpf



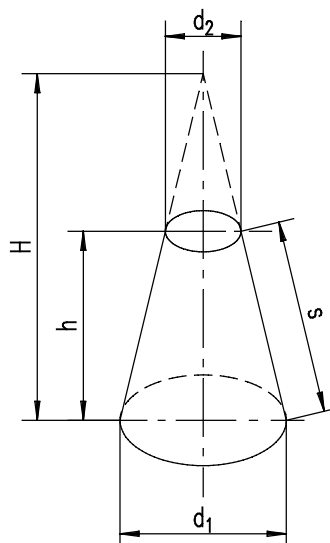
$$V = \frac{1}{3} h(a_1^2 + a_1 \cdot a_2 + a_2^2)$$

$$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2}$$

$$A_M = 2(a_1 + a_2) \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2}$$

$$A_O = 2(a_1 + a_2) \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2} + a_1^2 + a_2^2$$

Kegelstumpf



$$V = \frac{\pi}{12} h(d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2)$$

$$s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2}$$

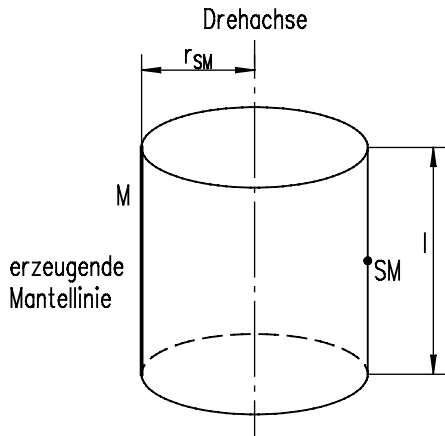
$$A_M = \frac{\pi}{2} s(d_1 + d_2)$$

$$A_O = \frac{\pi}{4} (d_1^2 + d_2^2 + 2s(d_1 + d_2))$$

4.3.5 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern

Erste Guldinsche Regel

Die Mantelfläche A_M eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge l der erzeugenden Linie und der Länge $2 \cdot \pi \cdot r_{SM}$ des Weges des Schwerpunktes SM der rotierenden Linie bei einer Umdrehung um die Drehachse.

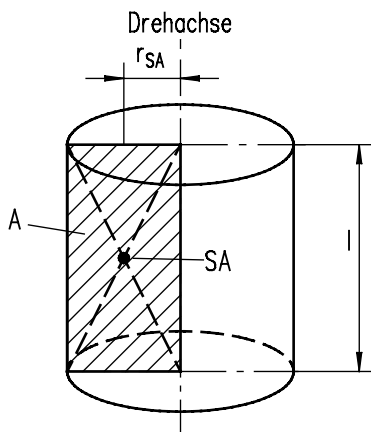


$$A_M = l \cdot \underbrace{2 \cdot \pi \cdot r_{SM}}_L$$

L : Bahnlänge des Schwerpunktes
 l : Länge der erzeugenden Mantellinie
 r_{SM} : Abstand des Schwerpunktes der erzeugenden Mantellinie M von der Drehachse

Zweite Guldinsche Regel

Das Volumen V eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt A der erzeugenden Fläche und dem Weg des Schwerpunktes SM der rotierenden Fläche bei einer Umdrehung um die Drehachse.



$$V = A \cdot \underbrace{2\pi r_{SA}}_L$$

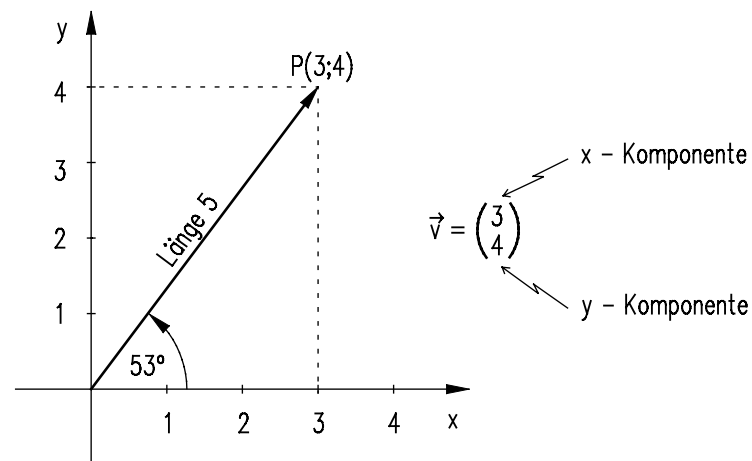
mit L : Bahnlänge des Schwerpunktes SA
 A : Inhalt der erzeugenden Fläche
 r_{SA} : Abstand des Schwerpunktes SA der erzeugenden Fläche A von der Drehachse

5 Grundlagen der Analysis und Vektorrechnung

5.1 Vektoren und Matrizen

5.1.1 Grundlagen der Vektorrechnung

Unter einem **Vektor** wird die Menge aller Pfeile verstanden, die gleiche Richtung, gleiche Länge und gleiche Orientierung haben. Einen beliebigen Pfeil aus dieser Menge nennt man **Repräsentant** des Vektors.



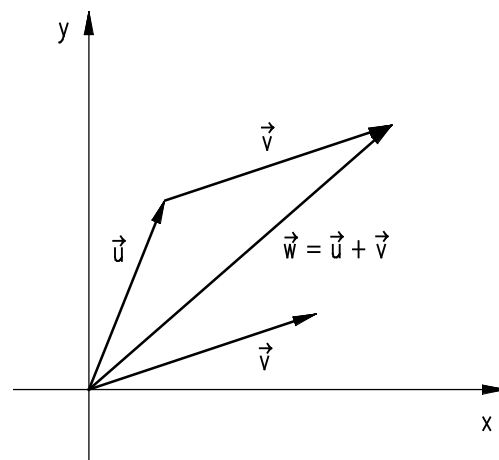
Spezielle Vektoren

Nullvektor $\vec{0}$: Vektor der Länge 0

Einheitsvektor \vec{e} : Vektor der Länge 1

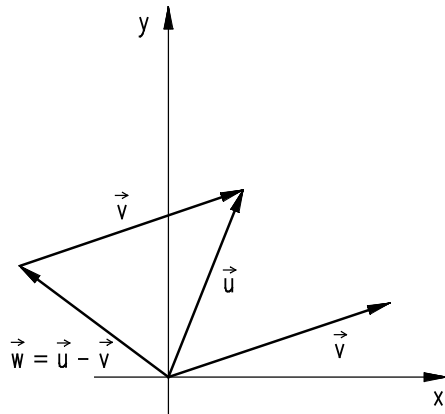
Addition von Vektoren

zeichnerisch

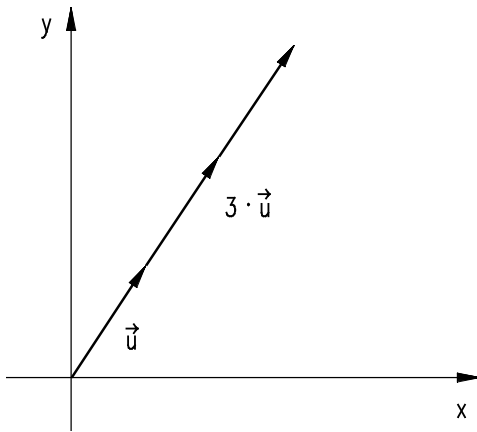


rechnerisch

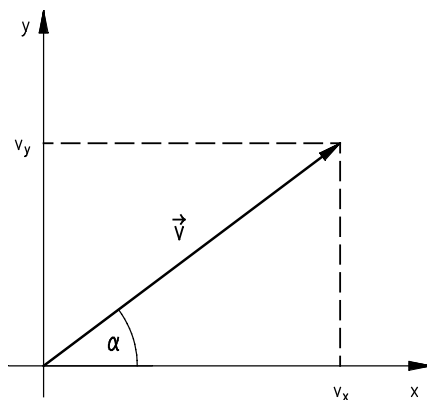
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{pmatrix}$$

Subtraktion von Vektoren

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x - v_x \\ u_y - v_y \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

$$\vec{w} = c \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} c \cdot u_x \\ c \cdot u_y \end{pmatrix}$$

Betrag eines Vektors

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Winkel eines Vektors mit der x-Achse

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,6 \Rightarrow \alpha = 53,13^\circ$$

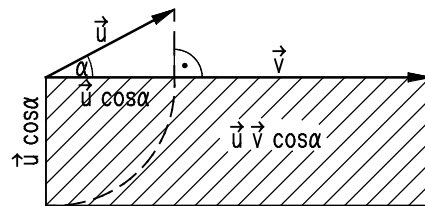
5.1.2 Multiplikation von Vektoren

Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 5$$



Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos \alpha = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{(-1) \cdot 3 + 2 \cdot 4}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,4472 \Rightarrow \alpha = 63,4^\circ$$

Einheitsvektor eines Vektors \vec{v}

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_v = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_x v_y - u_y v_x) \cdot \vec{e}_z$$

Dabei gibt das Vorzeichen die Richtung des Produktvektors an:

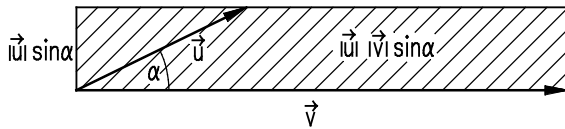
Negatives Vorzeichen: der Vektor zeigt aus der Zeichenebene hinaus.

Positives Vorzeichen: Der Vektor zeigt in die Zeichenebene hinein.

$$\text{Betrag: } |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha = |u_x v_y - u_y v_x|$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(-1) \cdot 4 - 2 \cdot 3| = 10$$



5.1.3 (2 x 2)-Matrix

Unter einer 2 x 2-Matrix wird rechteckiges Schema mit 2 Zeilen und 2 Spalten verstanden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Die vier Zahlen a_{11} , a_{12} , a_{21} und a_{22} nennt man die **Elemente** der Matrix.

Die Spalten $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ werden auch als **Spaltenvektoren**, die Zeilen $(a_{11} \ a_{12})$ bzw. $(a_{21} \ a_{22})$ als **Zeilenvektoren** der Matrix bezeichnet.

Addition und Subtraktion zweier Matrizen

Zwei (2 x 2)-Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ werden addiert bzw. subtrahiert, indem die entsprechenden Matrizenelemente addiert bzw. subtrahiert werden.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \text{ hei\u00dft die Summe aus A und B.}$$

$$D = A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} \text{ hei\u00dft die Differenz von A und B.}$$

Rechengesetze

Es gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz der Addition, d.h. es gilt:

$$A + B = B + A \text{ und}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Skalarmultiplikation

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar erfolgt komponentenweise, die einer Matrix elementweise.

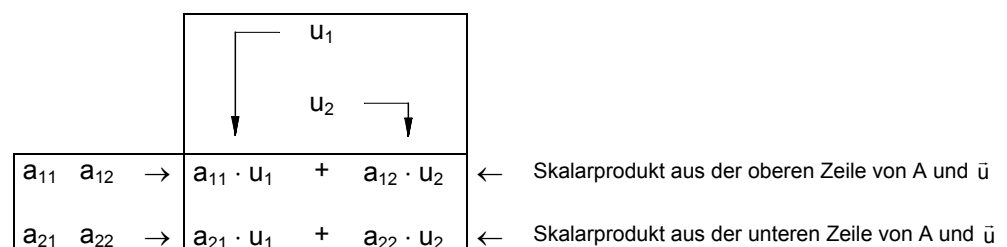
$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{c} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_{11} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_{21} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix} \qquad 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

Besitzen alle Elemente einer Matrix einen gemeinsamen Faktor c , so kann dieser vor die Matrix gezogen werden (ausklammern).

Multiplikation einer (2 x 2)-Matrix mit einem Vektor

Das Produkt einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit einem Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ ist ein Vektor \vec{v} .

Dessen Komponenten sind das Skalarprodukt aus den Zeilenvektoren von A und \vec{u} . Die Berechnung lässt sich einfach an einem Schema merken.



Drehmatrix

Eine Matrix A vom Typ

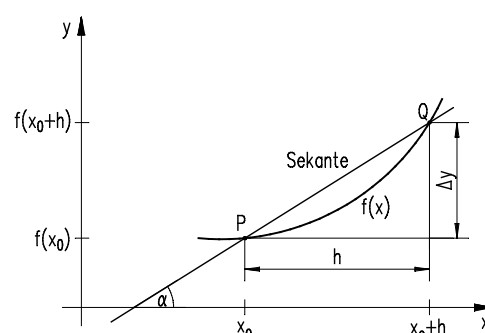
$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha = 30^\circ \quad A = \begin{pmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{pmatrix}$$

heißt Drehmatrix. Sie dreht einen Vektor bei der Multiplikation um den Winkel α .

5.2 Einführung in die Differenzial- und Integralrechnung

5.2.1 Differenzialrechnung

Differenzenquotient einer Funktion



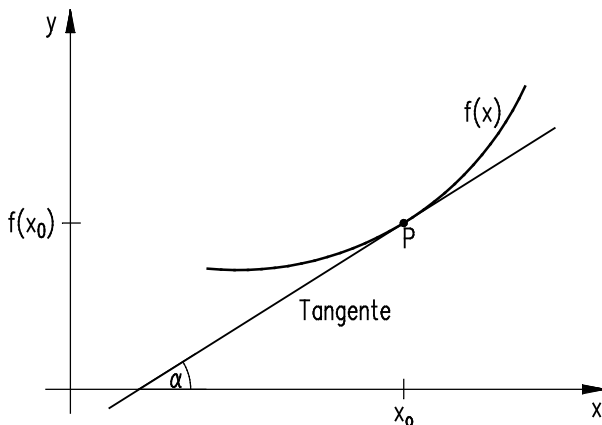
Der Ausdruck $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ wird als Differenzenquotient bezeichnet. Er gibt die Steigung m der Sekante durch die Punkte des Grafen der Funktion f P und Q an.

$$m = \tan \alpha = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Differenzialquotient

Der Ausdruck $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ für $h \rightarrow 0$ wird als Differenzialquotient bezeichnet. Er gibt die Steigung m der Tangente im Punkt P an.

$$m = \tan \alpha = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{für } h \rightarrow 0)$$

**Ableitungsfunktion**

Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ gibt für jede Stelle x die Steigung der zugehörigen Kurventangente an.

Ableitungsfunktionen einiger Grundfunktionen

$f(x)$	Ableitungsfunktion $f'(x)$
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Q}$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Ableitungsregeln

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = c \cdot g(x)$	Faktorregel $f'(x) = c \cdot g'(x)$
$f(x) = g(x) + h(x)$	Summenregel $f'(x) = g'(x) + h'(x)$
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	Produktregel $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
$f(x) = f(g(x))$	Kettenregel $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Beispiele zu den Ableitungsregeln:

$$\begin{array}{ccc}
 f(x) = x^2 \cdot \sin x & & f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x = x(2 \sin x + x \cdot \cos x) \\
 \begin{array}{cc} | & | \\ g(x) & h(x) \end{array} & \text{Produktregel} & \begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ = g'(x) h(x) & g(x) h'(x) & & \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 f(x) = \sin(2x + \pi) & & f'(x) = \cos(2x + \pi) \cdot 2 = 2 \cos(2x + \pi) \\
 \begin{array}{cc} | & | \\ f(g(x)) & g(x) \end{array} & \text{Kettenregel} & \begin{array}{ccc} | & | & | \\ f'(g(x)) & g(x) & g'(x) \end{array}
 \end{array}$$

Bedeutung der Ableitungsfunktion in der Technik

Ausgangsfunktion	Ableitung	Zusammenhang
Ladung $q(t)$	$i(t) = \dot{q}(t)$	Beim Stromfluss durch einen elektrischen Leiter ist die Stromstärke $i(t)$ die erste Ableitung der elektrischen Ladung $q(t)$ nach der Zeit t .
Stromstärke $i(t)$	$u(t) = L \cdot \dot{i}(t)$	Fließt durch eine Spule der Induktivität L ein zeitlich veränderlicher Strom der Stromstärke $i(t)$, so ergibt sich die elektrische Spannung $u(t)$ als Produkt aus Induktivität und der Ableitung der Stromstärke nach der Zeit t .
Weg $s(t)$	$v(t) = \dot{s}(t)$	Bei einer geradlinigen Bewegung ist die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ gleich der ersten Ableitung des Weges $s(t)$ nach der Zeit t .
Geschwindigkeit $v(t)$	$a(t) = \dot{v}(t)$	Bei einer geradlinigen Bewegung ist die Beschleunigung $a(t)$ gleich der ersten Ableitung der Geschwindigkeit $v(t)$ nach der Zeit t .
Weg $s(t)$	$a(t) = \ddot{s}(t)$	Bei einer geradlinigen Bewegung ist die Beschleunigung $a(t)$ gleich der zweiten Ableitung des Weges $s(t)$ nach der Zeit t .
Drehwinkel $\varphi(t)$	$\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$	Die augenblickliche Lage eines Massenpunktes bei einer Drehbewegung wird durch den zeitabhängigen Winkel $\varphi(t)$ beschrieben. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ ist die erste Ableitung des Drehwinkels $\varphi(t)$ nach der Zeit t .
Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$	$\alpha(t) = \dot{\omega}(t)$	Die Winkelbeschleunigung $\alpha(t)$ ist die erste Ableitung der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ nach t .
Drehwinkel $\varphi(t)$	$\alpha(t) = \ddot{\varphi}(t)$	Die Winkelbeschleunigung $\alpha(t)$ ist die zweite Ableitung des Drehwinkels $\varphi(t)$ nach der Zeit t .

5.2.2 Integralrechnung

Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion zur Funktion $f(x)$, wenn gilt: $F'(x) = f(x)$.

Bestimmtes Integral

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, dann heißt die Zahl $F(b) - F(a)$ das **bestimmte Integral über der Funktion f im Intervall $[a ; b]$** und wird mit

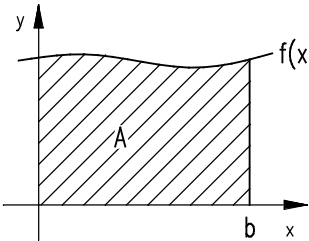
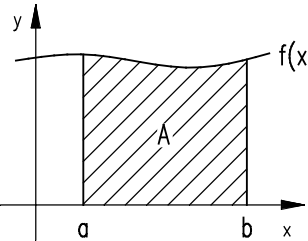
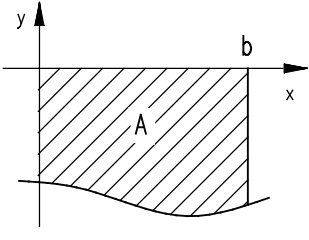
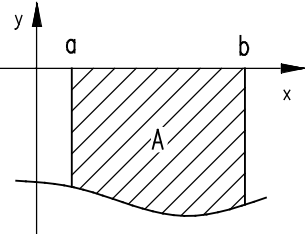
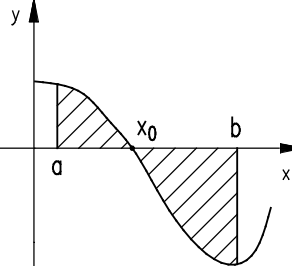
$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet. Es gilt also:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Flächenberechnung mit bestimmten Integralen

1. x-Achse ist Randlinie

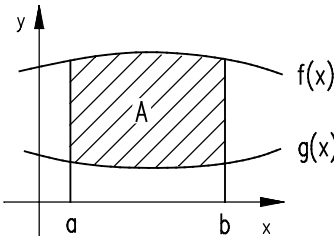
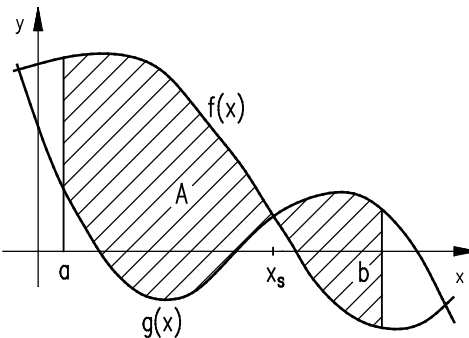
	linke Grenze y-Achse	linke Grenze $a < b$
positive Fläche	 $A = \int_0^b f(x) dx$	 $A = \int_a^b f(x) dx$
negative Fläche	 $A = -\int_0^b f(x) dx$	 $A = -\int_a^b f(x) dx$
Nullstelle in $[a ; b]$	 $A = \int_a^{x_0} f(x) dx - \int_{x_0}^b f(x) dx$	

$$f(x) = -2x + 4 \quad [1; 4]$$

$$\text{Nullstelle: } x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (-2x + 4) dx - \int_2^4 (-2x + 4) dx = \left[-\frac{2}{2}x^2 + 4x \right]_1^2 - \left[-\frac{2}{2}x^2 + 4x \right]_2^4 \\ &= -2^2 + 4 \cdot 2 - (-1 + 4 \cdot 1) - (-4^2 + 4 \cdot 4 - (-2^2 + 4 \cdot 2)) = 5 \end{aligned}$$

2. g(x) ist Randlinie

$f(x) \geq g(x)$ in $[a; b]$	Schnittpunkt in $[a; b]$
 $A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$	 $A = \int_a^{x_s} [f(x) - g(x)] dx + \int_{x_s}^b [g(x) - f(x)] dx$

Stammfunktionen einiger Grundfunktionen

$f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$f(x) = c$	$F(x) = cx$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$F(x) = x \cdot (\ln x - 1)$

Integrationsregeln

f(x)	Stammfunktion F(x)
$f(x) = c \cdot g(x)$	Faktorregel $F(x) = c \cdot G(x)$
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	Summenregel $F(x) = G(x) \pm H(x)$

$$f(x) = 3x^2 + 4 \cdot \sin x$$

$$F(x) = 3 \cdot \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{\substack{\text{Grund-} \\ \text{funktion} \\ \text{Faktorregel}}} + 4 \underbrace{(-\cos x)}_{\substack{\text{Grund-} \\ \text{funktion} \\ \text{Faktorregel}}} = x^3 - 4 \cos x$$

Summenregel

Anwendungen des bestimmten Integrals

Ausgangsfunktion	Integral	Skizze	Zusammenhang
Geschwindigkeit v(t)	$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$		Der Flächeninhalt entspricht dem im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ zurückgelegten Weg.
Beschleunigung	$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$		Der Flächeninhalt entspricht der im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ erreichten Geschwindigkeit.
Kraft F(s)	$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds$		Der Flächeninhalt entspricht der im Wegintervall $[s_1; s_2]$ verrichteten mechanischen Arbeit.
Stromstärke i(t)	$Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$		Der Flächeninhalt entspricht der im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ durch den Strom transportierten Ladung.