

**Mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Problemstellungen bearbeiten**

Von Technikerinnen und Technikern wird im beruflichen Alltag erwartet, dass sie Fragestellungen aus dem mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bereich kompetent bearbeiten können.

Dabei ist es häufig schwierig, in den Problemstellungen des beruflichen Alltages die grundlegenden mathematischen, physikalischen und technischen Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und in die Fachsprache und Symbolik der Mathematik zu übertragen.

In diesem Lernmodul werden deshalb realitätsnahe Aufgabenstellungen der Technik aus mehreren Fachgebieten beispielhaft untersucht und mathematische Lösungsansätze erarbeitet.

Voraussetzung für dieses Lernmodul ist eine erfolgreiche Bearbeitung der Lernmodule 1 bis 4 dieses Faches

- Zahlen kennen und Grundrechenarten anwenden
- Funktionen und Gleichungen erster Ordnung einordnen und anwenden
- Funktionen und Gleichungen höherer Ordnung anwenden
- Geometrische Gesetze auf zwei- und dreidimensionale Figuren anwenden

Alle weiteren notwendigen Informationen und Arbeitsunterlagen sind in diesem Lernmodul und im Modul Formeln enthalten.

Dieses Lernmodul ist im häuslichen Studium zu erarbeiten.

Der benötigte Zeitaufwand liegt bei ca. 20 Stunden.

Zusätzlich finden in den semesterbezogenen Präsenzphasen 6 Stunden Festigung und Vertiefung fachspezifischer und fächerübergreifender Zusammenhänge anhand beispielhafter Problemstellungen statt.

**LERNMODUL 5****Ziele****Ausgangssituation****Planung**

**Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Problemstellungen aus dem Bereich der Schwingungs- und Wellenlehre.....</b>	<b>9</b>
<b>2 Problemstellungen aus dem Bereich der Optik .....</b>	<b>20</b>
<b>3 Problemstellungen aus dem Bereich der Mechanik .....</b>	<b>28</b>
<b>4 Problemstellungen aus dem Bereich der Wärmelehre .....</b>	<b>42</b>
<b>5 Problemstellungen aus dem Bereich der Fertigungstechnik .....</b>	<b>54</b>
<b>Lösungsanhang .....</b>	<b>76</b>

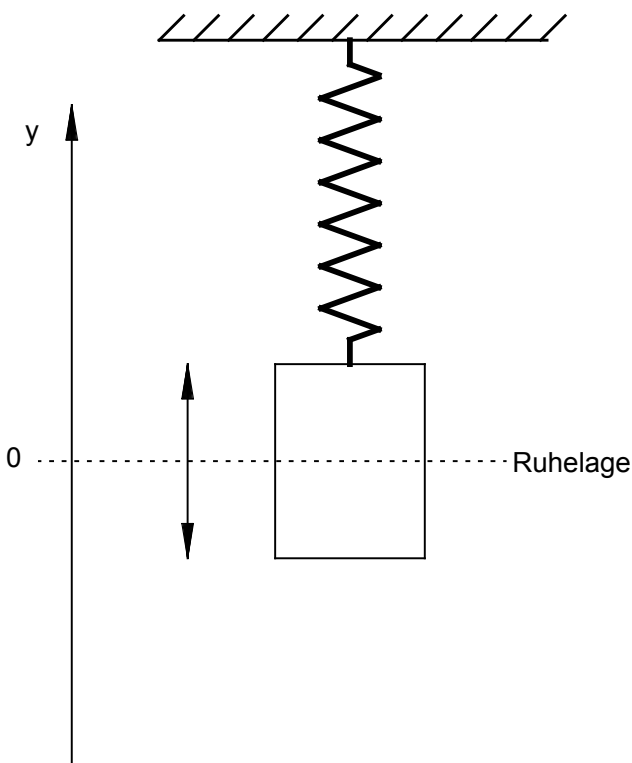
**Thema 1: Schwingungs- und Wellenlehre**

Ein Produzent für mechanische Federn erhält den Auftrag zur Herstellung einer speziellen Schraubenfeder für die Anwendung als Federpendel in einem neuen Freizeitparks.

Die Feder wird maximal mit einer Masse von 140 kg belastet und soll bei dieser Belastung eine Längenänderung von 1,40 m erfahren. Bei dieser Stellung ist die Ruhelage gegeben.

Wird der Pendelkörper aus der Ruhelage ausgelenkt und losgelassen, so schwingt er längs einer vertikalen Achse in Form einer harmonischen Schwingung auf und ab.

Die maximale Auslenkung der Feder aus der Ruhelage zu Beginn der Schwingung soll 1,50 m sein.

**Mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Problemstellungen**

Für die Genehmigung der neuen Anlage beim technischen Überwachungsverein benötigt der Auftraggeber einige technische Daten des Systems.

Ein Techniker wird mit der Berechnung der folgenden Daten beauftragt (Reibung und Federmasse für die erste Berechnung vernachlässigt):

- Federkonstante
- Schwingungsdauer und Frequenz
- maximale Geschwindigkeit der Pendelmasse
- zusätzliche Beschleunigung (ohne Erdbeschleunigung), die die Pendelmasse beim Loslassen nach der Auslenkung erfährt
- maximale Kraft am Aufhängungspunkt der Feder

## Thema 2: Optik

In einem naturwissenschaftlichen Museum sollen die Besucher ein Kristallwachstum „live“ beobachten können.

Der Kristall wächst aus einer Schmelze bei einer Temperatur von über 1000 °C. Bei dieser Temperatur strahlt der Kristall bereits im sichtbaren Bereich Licht ab. Am Anfang hat der Keimkristall eine Länge von 5 mm. Er wird im Beobachtungszeitraum auf eine Endlänge von 3 cm wachsen.

Um den Wachstumsprozess vielen Besuchern gleichzeitig zeigen zu können, wird eine reelle Abbildung des Kristalls mithilfe einer Sammellinse ( $f = 10 \text{ cm}$ ) auf eine vom Kristall 5,20 m entfernte Leinwand projiziert.

Der Techniker des Museums wird im Rahmen der Planungsphase des neuen Museumsbereiches beauftragt, folgende Daten zu ermitteln:

- die exakte Linsenposition für die gewünschte Projektion
- die Bildgröße auf der Leinwand am Anfang des Wachstums ( $B_1$ )
- die Bildgröße am Ende des Wachstums ( $B_2$ )
- den Abbildungsmaßstab

## Thema 3: Mechanik

In den Betriebsferien soll die Verkaufsausstellung einer Firma geräumt werden. Da die bereits angelaufenen Umbauarbeiten den normalen Abtransport behindern würden, soll eine Transportrutsche zum Einsatz kommen. Es ist geplant, die empfindlichen Exponate in Schaumgummi gebettet in Metallkisten zu verpacken und auf der Rutschfläche aus Holz abwärts gleiten zu lassen. Die Unterkante des Fensters liegt auf vier Meter Höhe. Der Auslauf im Hof unter dem Fenster soll aus ergonomischen Gründen zur Abnahme in einem Meter Höhe liegen.

Ein Techniker wird mit der Konstruktion, d.h. mit der Bestimmung der Rutschenlänge und des Neigungswinkels der Transportrutsche beauftragt.

Dabei sollen folgende Randbedingungen berücksichtigt werden:

- Der Neigungswinkel der Transportrutsche soll so gewählt werden, dass eine oben aufgesetzte Kiste am unteren Punkt der Rutsche Fußgängergeschwindigkeit (5 km/h) erreicht.
- Das Gewicht der Metallkisten mit Inhalt beträgt jeweils 10 kg.

**Thema 4: Wärmelehre**

Nachdem der Heizölpreis auf über 35 Cent pro Liter gestiegen ist, denkt der Chef eines Produktionsbetriebes über Alternativen nach. Dabei erinnert er sich, dass er damals eine Heizungsanlage hat einbauen lassen, die auch für feste Brennstoffe wie Holz geeignet ist. Da vor kurzem unweit des Produktionsbetriebes ein Sägewerk mit angeschlossenem Möbelwerk errichtet wurde, ruft er dort an und fragt nach Brennholzabfall. Wenig später erhält er folgendes Angebot per Fax.

**TELEFAX**

*Frau Herrn      Meier  
Firma            ProForm GmbH  
Datum           24.09.04*

*Sehr geehrter Herr Meier,*

*wie soeben telefonisch angefragt sende ich Ihnen ein unverbindliches Angebot über Brennholz aus unserem Betrieb.*

*Holzabfälle, Buche, lufttrocken, inklusive Anlieferung      80 € / Tonne*

*Mit freundlichen Grüßen*

*i.A.  
Müller*

Mit diesem Fax wendet sich der Chef an einen seiner Techniker und beauftragt ihn, einen Vergleich der Brennstoffkosten für Heizöl und für Holz zu erstellen.

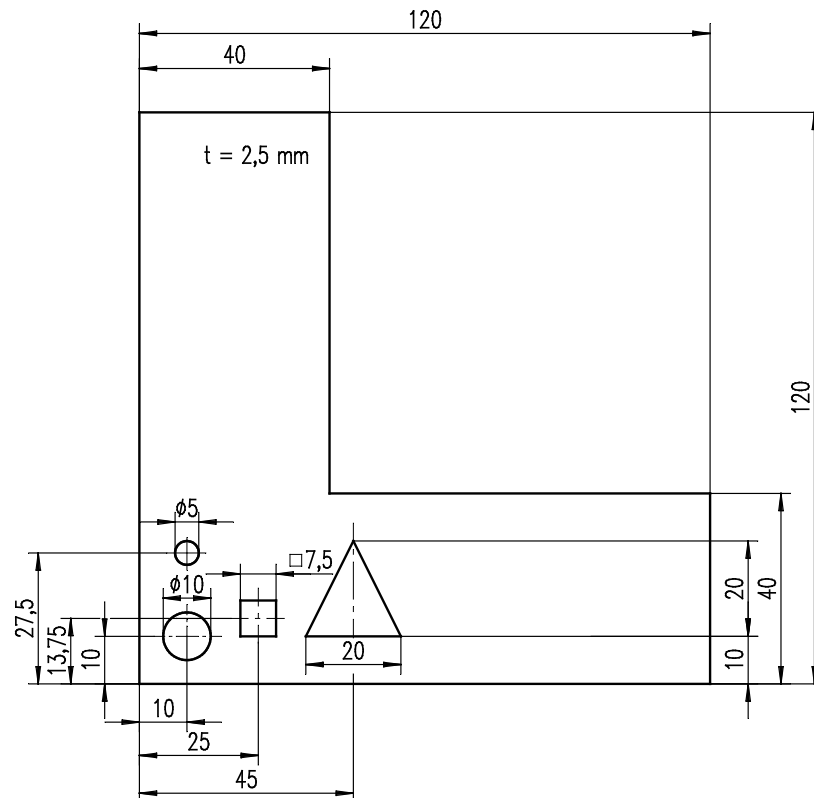
Dabei sollen folgende Randbedingungen berücksichtigt werden:

- durchschnittlicher Heizölverbrauch pro Jahr bisher 18000 Liter
- beim Verbrennen von lufttrockenem Holz wird ein Teil der Energie zum Erhitzen und zum Verdampfen des Wasseranteils benötigt
- 1 kg luftgetrocknetes Holz enthält bei einer Lagertemperatur von 20 °C noch eine Feuchtigkeit von 0,13 kg Wasser
- völlig wasserfreies Buchenholz hat einen Heizwert von 18,9 MJ/kg
- die mittlere Dichte von Heizöl beträgt 1,015 kg/dm<sup>3</sup>

### Thema 5: Fertigungstechnik

Einem metallverarbeitenden Betrieb, der sich auf die Herstellung von Stanzteilen spezialisiert hat, wurde von einem Elektrogerätehersteller ein Auftrag erteilt.

Bei diesem Auftrag handelt es sich um die Fertigung von 4500 Blechplatten aus St 44 (S275JR), welche aus einem 2,5 mm dicken und 122 mm breiten, endlosen Blechstreifen geschnitten werden sollen.



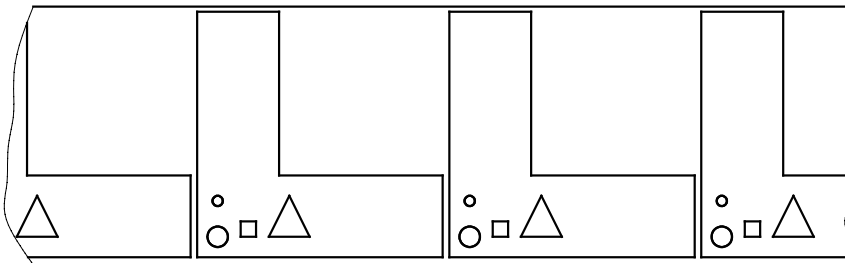
Um eine Überlastung der zur Verfügung stehenden Maschine zu vermeiden, darf die maximale Schnittkraft von 450 kN nicht überschritten werden.

Ein Techniker wird vor Beginn der Fertigung von der Geschäftsleitung mit folgenden Tätigkeiten beauftragt:

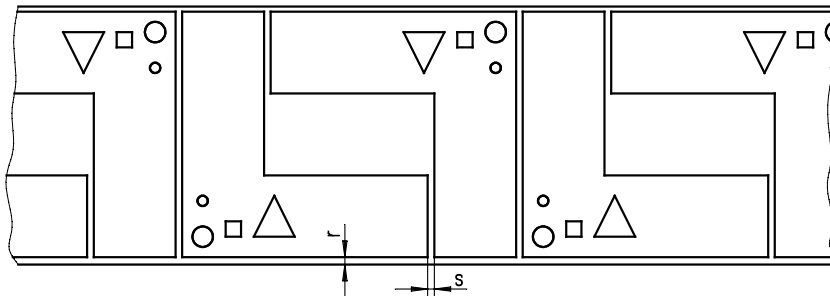
- Es ist zu prüfen, ob die Blechprofile in einem einzigen Schnitt oder in mehreren Schnitten (Folgeschnittverfahren) mit der vorhandenen Maschine zu fertigen sind. Sollte das Folgeschnittverfahren gewählt werden, ist in der ersten Folge die gesamte Innenkontur zu fertigen. Im zweiten Schnitt erfolgt dann das Ausschneiden der Außenkontur. Mehr als zwei Schnitte sind jedoch nicht vorzusehen.
- Um ein Kippen des Werkzeugs beim Schneiden zu verhindern, ist die Lage des Kraftschwerpunktes des Einspannzapfens für jeden Schnitt zu bestimmen.
- Für die Stückliste des Elektrogeräteherstellers ist das Gewicht des hergestellten Blechprofils zu berechnen.

- Weiterhin ist der Ausnutzungsgrad für die Anordnung der Teile in Streifen sowie der Materialverschnitt in % der jeweiligen Streifenausnutzung (Lage 1 oder Lage 2, s. folgende Abbildung) zu ermitteln.

Lage 1)



Lage 2)



$r = 1 \text{ mm}$   
 $s = 0,9 \text{ mm}$

Alle Materialangaben sind der folgenden Werkstofftabelle zu entnehmen.

Werkstoff Kurz- zeichen	E- Modul Dichte N/mm <sup>2</sup> g/cm <sup>3</sup>		Belastungsfall			
			I		II	III
			$R_m$ N/mm <sup>2</sup>	$R_e / R_{p 0,2}$ N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_{z \text{ sch}}$ N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_{z \text{ d W}}$ N/mm <sup>2</sup>
St 37 (S235JR)	210000	7,85	370	235	235	150
St 44 (S275JR)			420	275	275	180
St 50 (E295)			500	295	295	210
St 60 (E335)			600	335	335	250
St 70 (E360)			720	365	365	300

Zugfestigkeitswerte allgemeiner Baustähle, DIN 17100

**Bearbeitungsempfehlungen für die mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Problemstellungen**

- *Erarbeiten Sie sich Informationen über die naturwissenschaftlich-technischen Bereiche der*
  - *Schwingungs- und Wellenlehre*
  - *Optik*
  - *Mechanik*
  - *Wärmelehre*
  - *Fertigungstechnik!*
- *Erarbeiten Sie sich geeignete mathematische Methoden und Berechnungsverfahren zur Bearbeitung naturwissenschaftlich-technischer Problemstellungen der oben genannten Bereiche!*
- *Realisieren Sie schriftliche Lösungen zu den naturwissenschaftlich-technischen Problemstellungen!*



## 1 Problemstellungen aus dem Bereich der Schwingungs- und Wellenlehre

### Lernbereich

Als Schwingungen und Wellen werden periodische Zustandsänderungen bezeichnet, die mechanische und elektromechanische Systeme erfassen können. Mechanische Systeme können einen festen, flüssigen oder gasförmigen Zustand haben. Als ein Beispiel für ein schwingendes System wird hier ein Feder-Masse-System betrachtet. Es werden potenzielle und kinetische Energie zwischen den Systemen periodisch ausgetauscht. Bei einem elektromagnetischen System pendelt die Energie periodisch zwischen der elektrischen Ladung im Kondensator und der magnetischen Ladung in der Spule.

Erfassen die periodischen Schwankungen der Energie nur ein einzelnes schwingungsfähiges Element, so wird dieses als Schwingung bezeichnet. Betreffen dagegen die Energieschwankungen eine Vielzahl aneinander gekoppelte Elemente, so treten Wellen auf. Die mathematische Betrachtung von Schwingungen und Wellen sind annähernd gleich. Ihr Unterschied liegt in den beeinflussenden physikalischen Größen und der räumlichen Betrachtung der Wellen.

Die Herleitung einer allgemeinen mathematischen Schwingungsfunktion stammt aus der Trigonometrie. Unter Verwendung des Einheitskreises mit einem Radius  $r = 1$  lassen sich die trigonometrischen Funktionen aufstellen. Dreht sich der y-Zeiger im Einheitskreis einmal in der Runde, so ist der Verlauf der Funktion in einem x-, y-Koordinatensystem gleich dem Verlauf einer Schwingung.

$$y = \hat{y} \cdot \sin x$$

Dreht sich der y-Zeiger, wie beschrieben, im Einheitskreis einmal in der Runde, so hat er sich um den Vollwinkel von  $2 \cdot \pi$  rad gedreht. Durch die Drehbewegung ist eine Beziehung zum Winkel  $\varphi$  aufgestellt worden.

$$y = \hat{y} \cdot \sin \varphi$$

Abbildung 1 zeigt die Herleitung der trigonometrischen Sinus-Funktion. Durch die Verlagerung des Anfangspunktes um einen Winkel von  $1/2 \cdot \pi$  rad ( $90^\circ$ ) bei  $t = 0$  ergibt sich die Cosinus-Funktion.

$$y = \hat{y} \cdot \cos \varphi$$

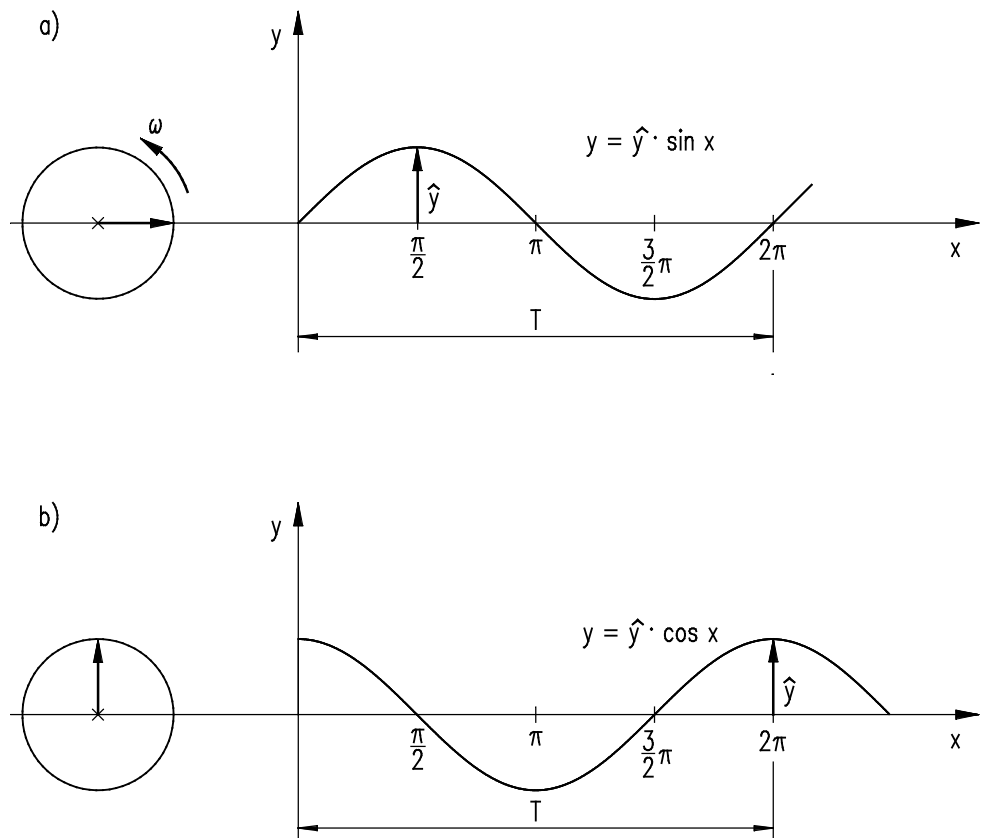


Abbildung 1 a) Die Sinus-Funktion b) Die Cosinus-Funktion

Das Maximum einer Schwingung wird als Amplitude  $\hat{y}$  bezeichnet.

Bewegt sich der y-Zeiger im Einheitskreis mit einer konstanten Geschwindigkeit  $\omega$ , so benötigt er für den vollen Kreisumlauf eine Umlaufzeit  $T$ . Bei einer Schwingung wird dieser Zeitraum als Schwingungsdauer  $T$  bezeichnet. Eine volle Schwingung besteht somit aus einem Wellenberg und einem Wellental. Die x-Achse wird bei einer vollen Schwingung zweimal geschnitten.

Die Frequenz  $f$  einer Schwingung ergibt sich aus der Anzahl der Umdrehungen  $z$  pro Zeitabschnitt oder aus dem Kehrwert der Schwingungsdauer  $T$ :

$$f = \frac{z}{t} = \frac{1}{T}$$

Die Kreisfrequenz  $\omega$  ist die Geschwindigkeit des y-Zeigers im Einheitskreis, bzw. die Geschwindigkeit einer Schwingung.

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Durch die Verbindung der Funktion mit der Kreisfrequenz steht sie in Abhängigkeit zu der Zeit  $t$ . Aus dieser Beziehung ergibt sich das Weg-Zeit-Gesetz einer harmonischen Schwingung:

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Durch die Verlagerung des Anfangspunktes um einen Winkel  $1/2 \cdot \pi$  rad ergibt sich bei  $t = 0$  die folgende Schwingungsgleichung:

$$y(t) = \hat{y} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

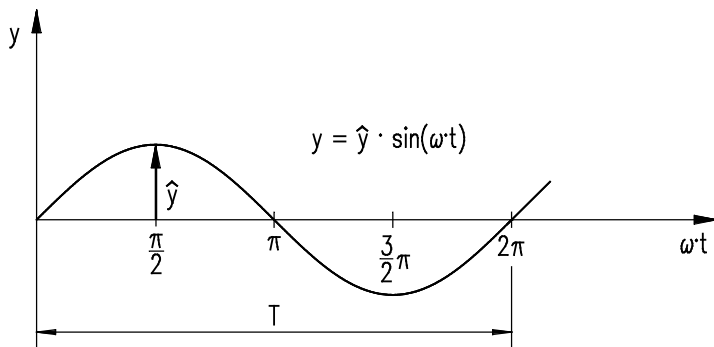


Abbildung 2 Harmonische Schwingung

Sind die zeitlichen Abstände der Nulldurchgänge bzw. der Maximas einer Schwingung gleich, so handelt es sich um eine harmonische Schwingung.

Sind die Beträge der Amplituden einer Schwingung während eines betrachteten Schwingungszeitraums konstant, so ist die Schwingung ungedämpft.

### Lehrbeispiel 1

Eine harmonische Schwingung hat die Frequenz  $f$  von 0,4 Hz, die Amplitude  $\hat{y} = 2$  cm und eine Anfangsauslenkung von  $y_{(0)} = 1$  cm. Das Maximum der Schwingung tritt verspätet auf.

Bestimmen Sie die Werte von  $T_0$ ;  $\omega$  und  $y$  bei  $t = 11$  s!

### Lösung

**Gegeben:**  $f = 0,4$  Hz  
 $\hat{y} = 2$  cm  
 $y_{(0)} = 1$  cm

**Gesucht:**  $T_0$ ;  $\omega$ ;  $y_{(11\text{ s})}$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1\text{ s}}{0,4}$$

$$\underline{\underline{T = 2,5\text{ s}}}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 0,4 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\underline{\underline{\omega = 2,51 \frac{1}{\text{s}}}}$$

$$y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$y(11\text{ s}) = 2\text{ cm} \cdot \sin\left(2,51 \frac{1}{\text{s}} \cdot 11\text{ s}\right) = 2\text{ cm} \cdot \sin(27,61)$$

Vorsicht! Den Winkel als Radiant (rad) eingeben!

$$\underline{\underline{y_{(11\text{ s})} = 1,23\text{ cm}}}$$

Die allgemeine Schwingungsgleichung wird auch als die Weg-Zeit-Gleichung beschrieben. Der zurückgelegte Weg  $y$  ist in diesem Fall keine Wegstrecke  $s$ , sondern es ist die Auslenkung des Betrags von  $y$  zu einer Zeit  $t$ . Der Auslenkung  $y$  liegt bei einer harmonischen, ungedämpften Schwingung in einem Bereich von

$$-\hat{y} \leq y \leq +\hat{y}.$$

Der Anfangswert des Winkels, der sogenannte Anfangswinkel  $\varphi_0$  der Schwingung, ist auch bei der Schwingungsgleichung zu beachten.

$$y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Ist der Anfangswinkel gleich 0, so vereinfacht sich die Gleichung in:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0 \\ \Rightarrow y &= \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeit  $v$  muss die Auslenkung  $y$  der allgemeinen Schwingungsgleichung über die Zeit  $t$  differenziert werden.

$$\frac{dy}{dt} = v(t) = \hat{y} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Zur Berechnung der Beschleunigung  $a$  muss die Gleichung erneut über die Zeit differenziert werden.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a(t) = -\hat{y} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung eines schwingenden Körpers oder Systems findet die Differenzialrechnung aus der Mathematik ihre Anwendung.

Um einen Bezug zur Physik zu bekommen, soll nachfolgend ein Feder-Masse-System betrachtet werden. Das Schwingverhalten eines solchen Systems ist mit einer harmonischen Schwingung zu vergleichen. Bei konstanter Auslenkung, während eines betrachteten Zeitraums, handelt es sich hierbei um eine ungedämpfte, harmonische Schwingung.

Nach der Newtonschen Bewegungsgleichung ist die Beschleunigungskraft  $F_a$  des Körpers gleich dem Produkt der Masse  $m$  und der Beschleunigung  $a$ .

$$F_a = m \cdot a$$

Die Federkraft  $F_c$  der Feder ist das negative Produkt aus der Federsteifigkeit  $c$  und der Auslenkung  $y$ .

$$F_c = -c \cdot y$$

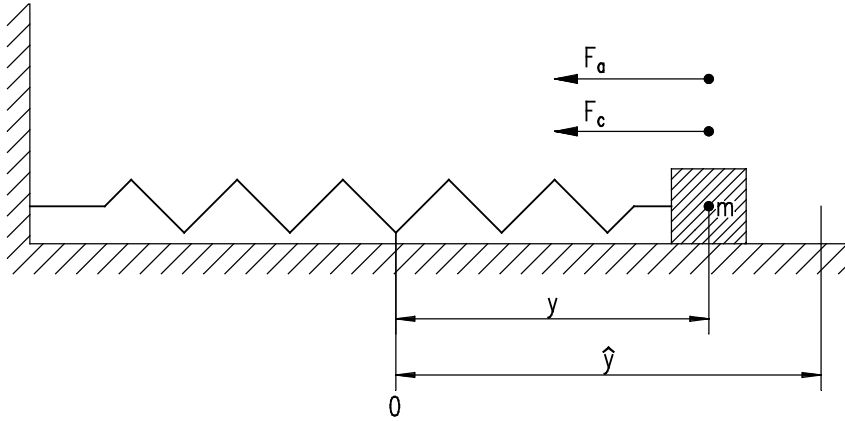


Abbildung 3 Feder-Masse-System

Bei einer harmonischen Schwingung eines Feder-Masse-Systems ist die Beschleunigungskraft des Körpers gleich der Federkraft.

$$F_a = F_c = m \cdot a = -c \cdot y$$

$$m \cdot a + c \cdot y = 0$$

$$a + \frac{c}{m} \cdot y = 0$$

Die Beschleunigung  $a$  der Gleichung kann durch den Ausdruck der zweifachen Differenzialrechnung des Weges über die Zeit ersetzt werden.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} \cdot y = 0$$

Durch das Einsetzverfahren werden die allgemeinen Ausdrücke der Schwingungsgleichung in die Formel eingebracht. Mit dem gewonnenen Ausdruck lässt sich die Formel stark vereinfachen.

$$-\hat{y} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) + \frac{c}{m} \cdot \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = 0$$

Der Term  $\hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$  lässt sich aus der Formel kürzen und es bleibt:

$$-\omega^2 + \frac{c}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{c}{m}$$

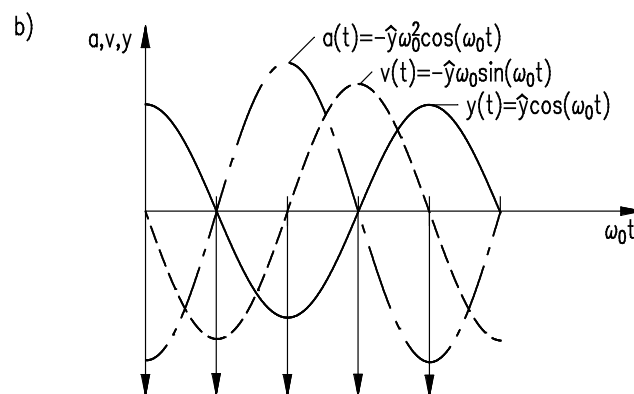
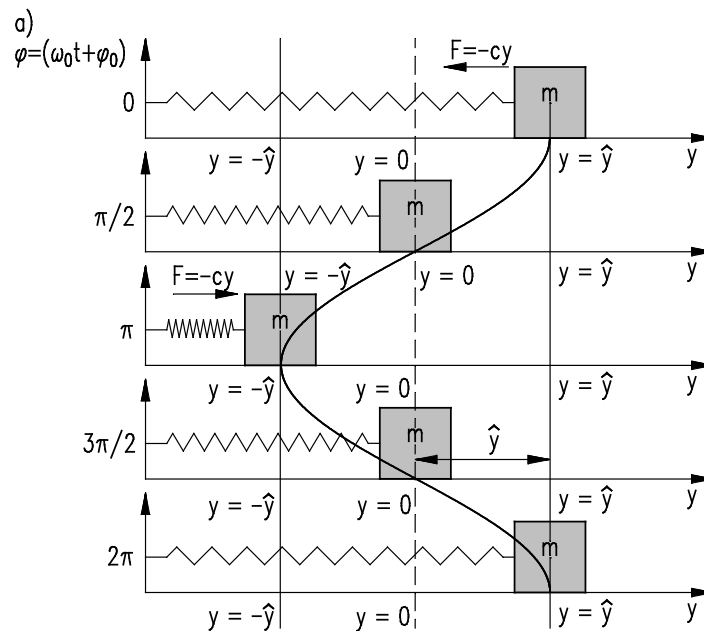
Durch die Anwendung mehrerer mathematischer Zusammenhänge lässt sich die Berechnung eines homogen schwingenden Feder-Masse-Systems der Physik stark vereinfachen. Es lassen sich hieraus die folgenden Formeln herleiten:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}$$

In Abbildung 4 wird das Bewegungsverhalten eines Feder-Masse-Systems aufgezeigt. Es werden die drei Schwingungsfunktionen  $y(t)$ ,  $v(t)$  und  $a(t)$  zusammen in einem Koordinatensystem dargestellt. So werden die zeitlichen Verläufe der drei Funktionen sehr gut veranschaulicht.



Winkel	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$		
Größe							
$y(t)$	$\hat{y}$	0	$-\hat{y}$	0	$\hat{y}$	$y(t) = \hat{y} \cos(\omega_0 t)$	$y_{\max} = \hat{y}$
$v(t)$	0	$-v_{\max}$	0	$v_{\max}$	0	$v(t) = -\hat{y} \omega_0 \sin(\omega_0 t)$	$v_{\max} = \hat{y} \omega_0$
$a(t)$	$-a_{\max}$	0	$a_{\max}$	0	$-a_{\max}$	$a(t) = -\hat{y} \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$	$a_{\max} = \hat{y} \omega_0^2$

Abbildung 4 Bewegungsverhalten des Feder-Masse-Systems

Weitere ähnlich schwingende Systeme der Physik, die unter Zuhilfenahme von mathematischen Verfahren berechnet werden können, sind zum Beispiel das mathematische bzw. physikalische Pendel, der Torsionspendel oder das Flüssigkeitspendel im U-Rohr.

### Lehrbeispiel 2

Eine vertikal hängende Feder verlängert sich durch das Anhängen eines Körpers mit einer Masse  $m$  von 20 g um  $\Delta s = 10 \text{ cm}$ . Die Masse der Feder ist hierbei zu vernachlässigen. Die Erdbeschleunigung kann mit  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  angenommen werden.

*Berechnen Sie die Federsteifigkeit der Feder und die Schwingungsdauer, wenn ein Körper mit einer Masse von 40 g angehängt wird!*

### **Lösung**

**Gegeben:**  $m_1 = 20 \text{ g}$   
 $\Delta s = 10 \text{ cm}$   
 $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$   
 $m_2 = 40 \text{ g}$

**Gesucht:**  $c$ ;  $T$

#### **Ermittlung der Federsteifigkeit**

$$F_c = -c \cdot s$$

$$F_c = F_g = m \cdot g$$

$$\Rightarrow c = \frac{m_1 \cdot g}{\Delta s} = \frac{0,02 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,1 \text{ m}}$$

$$\underline{\underline{c = 2 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}}}$$

#### **Ermittlung der Schwingungsdauer**

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{c}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0,04 \text{ kg}}{2 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}}}$$

$$\underline{\underline{T = 0,89 \text{ s}}}$$

Die Form einer Welle ist ähnlich der Form einer harmonischen Schwingung. Dies ist am Beispiel von Wellen auf einem See sehr gut zu erkennen. Die Wellenausbreitung wird als ein schwingungsfähiges System bezeichnet, das räumlich miteinander gekoppelt ist. Bei einer Wellenbewegung wird aber keine Materie transportiert, sondern Energie.

Um Wellen mathematisch zu beschreiben, muss auch hier ein qualitativer und quantitativer Bezug zu den physikalischen Größen hergestellt werden.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  einer Welle ist gleich dem Produkt der Wellenlänge  $\lambda$  und der Frequenz  $f$  der Welle.

$$c = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}$$

Eine harmonische Welle mit dem Anfangspunkt  $x = 0$  ist eine Funktion über die Zeit  $t$  und wird allgemein wie eine harmonische Schwingung beschrieben. Sie ist abhängig von ihrer Amplitude  $\hat{y}$ , ihrer Ausbreitungsgeschwindigkeit  $\omega$  und dem Anfangswinkel  $\varphi_0$ .

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Wird die Welle an einen beliebigen Ort  $x$  betrachtet, so schwingt sie zwar immer noch harmonisch, aber die Schwingung ist zeitlich verspätet. Diese Verspätung  $\Delta t$  muss bei der allgemeinen Gleichung berücksichtigt werden.

$$\Delta t = \frac{x}{c}$$

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot (t - \Delta t) + \varphi_0)$$

$$y(x, t) = \hat{y} \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\omega}{c} \cdot x + \varphi_0\right)$$

Unter Berücksichtigung der Geschwindigkeit und einem Anfangswinkel von  $\varphi_0 = 0$  ergibt sich hieraus:

$$y(x, t) = \hat{y} \cdot \sin\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Die Wellenlehre findet in der Physik in den Bereichen des Schalls und der Lichtstrahlen ihre Anwendung. Hier können die qualitativen und quantitativen Ausdrücke der Physik mit den allgemeinen Wellengleichungen zugeordnet werden. Mit den gewonnenen Erkenntnissen kann das Verhalten von Wellen bei Überlagerung, Dehnung, Beugung und Brechung genau analysiert werden.

### Lehrbeispiel 3

Eine Schallwelle wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$y = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \sin\left(1800 \frac{1}{\text{s}} \cdot t - 5 \frac{1}{\text{m}} \cdot x\right)$$

*Berechnen Sie*

**3.1 die Frequenz  $f$ !**

**3.2 die Wellenlänge  $\lambda$ !**

**3.3 die Phasengeschwindigkeit  $c$ !**



**Lösung**

**Gegeben:**  $y = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \sin \left( 1800 \frac{1}{\text{s}} \cdot t - 5 \frac{1}{\text{m}} \cdot x \right)$

**Gesucht:**  $f$ ;  $\lambda$ ;  $c$

Allgemeine Form:  $y = \hat{y} \cdot \sin \left( 2 \cdot \pi \cdot \left[ \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right] \right)$

**Lehrbeispiel 3.1**

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow 1800 \frac{1}{\text{s}} \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1800}{2 \cdot \pi \cdot \text{s}}$$

$$f = 286,5 \frac{1}{\text{s}}$$

**Lehrbeispiel 3.2**

$$\Rightarrow 5 \frac{1}{\text{m}} \cdot x = 2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{5} \text{ m}$$

$$\lambda = 1,257 \text{ m}$$

**Lehrbeispiel 3.3**

$$c = \lambda \cdot f = 1,257 \text{ m} \cdot 286,5 \frac{1}{\text{s}}$$

$$c = 360 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Aufgaben**
Aufgabe 1

Stellen Sie die Funktion zur Beschreibung einer Welle um, sodass Sie mit ihr die Wellenlänge  $\lambda$  errechnen!

$$y_{(x,t)} = \hat{y} \cdot \sin \left[ 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

Aufgabe 2

Die Amplitude einer harmonischen Cosinus-Schwingung hat einen Wert von  $\hat{y} = 4 \text{ cm}$ , die Schwingungsdauer beträgt  $T = 2 \text{ s}$ . Die Anfangsauslenkung der Schwingung beträgt  $y_{(0)} = 1 \text{ cm}$ , das Maximum kommt später.

Berechnen Sie

- 2.1 die Frequenz  $f$ !
- 2.2 die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ !
- 2.3 den Anfangswinkel der Schwingung  $\varphi_0$ !
- 2.4 stellen Sie die zugehörige Schwingungsgleichung auf!
- 2.5 den Funktionswert, zur Zeit  $t = 25 \text{ s}$ !

Aufgabe 3

An einer vertikal aufgehängten Feder wird ein Körper mit einer Masse  $m = 0,2 \text{ kg}$  gehängt. Die Feder erfährt dabei eine Auslenkung von  $s = 10 \text{ cm}$ . Danach wird ein Körper mit einer Masse von  $1 \text{ kg}$  an die Feder gehängt.

Die Schwingungsgleichung:

$$\begin{aligned} y(t) &= \hat{y} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ v(t) &= -\hat{y} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ a(t) &= -\hat{y} \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \end{aligned}$$

- 3.1 Berechnen Sie die Schwingungsdauer  $T$  bei einer Erdbeschleunigung von  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ !

$$F_g = F_c = c \cdot y$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}$$

- 3.2 Berechnen Sie die Kreisfrequenz  $\omega$  der Schwingung!
- 3.3 Berechnen Sie die maximale Auslenkung des Feder-Masse-Systems mit der Last von  $m = 1 \text{ kg}$ !
- 3.4 Berechnen Sie die Geschwindigkeit bei  $t_1 = 1/4 T$  und  $t_2 = T$  ( $\varphi_0 = 0$ )!

3.5 Berechnen Sie die Beschleunigung zu den unter Aufgabe 3.4 angegebenen Zeiten!

#### Aufgabe 4

Die Wassertiefe eines Sees soll mithilfe eines Echolots gemessen werden. Hierzu wird direkt unterhalb der Wasseroberfläche ein Schallerreger montiert, der eine Schallwelle mit einer Frequenz von  $f = 500 \text{ Hz}$  aussendet. Die ausgesandte und am Boden reflektierte Schallwelle trifft nach einer Zeit von  $t = 1 \text{ s}$  wieder auf den Empfänger des Echolots.

Die Schallgeschwindigkeit bei  $10^\circ \text{ C}$  kaltem Wasser beträgt  $c = 1450 \text{ m/s}$ .

4.1 Berechnen Sie die Seetiefe!

4.2 Berechnen Sie die Wellenlänge  $\lambda$  der Schallwelle!

$$c = \frac{\lambda}{T}$$

**Lernbereich**

## 2 Problemstellungen aus dem Bereich der Optik

Die Optik ist die Lehre vom Licht und befasst sich mit den Erscheinungen, die durch das Sinnesorgan Auge wahrgenommen werden. Das Licht kann in der Physik als elektromagnetische Wellen beschrieben werden, die sich im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  ausbreiten. Die klassische Optik wird unterschieden in die geometrische Optik und in die Wellenoptik. Beide Arten der Optik haben durch die Festlegung der quantitativen und qualitativen Ausdrücke der physikalischen Größen einen direkten Bezug zur Mathematik.

Die elektromagnetischen Wellen des sichtbaren Lichts liegen in einem Spektrum mit einem Wellenlängenbereich von:

$$380 \text{ nm} \leq \lambda \leq 780 \text{ nm}$$

Die Frequenz des sichtbaren Lichts liegt in einem Bereich von:

$$3,84 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \leq f \leq 7,89 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Sie wird durch die Division der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  zur Wellenlänge  $\lambda$  bestimmt.

$$f = \frac{c_0}{\lambda}$$

$$c_0 = 299.792,458 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Die geometrische Optik findet immer dann ihre Anwendung, wenn die Dimension der Gegenstände, wie z.B. Linsen, Blenden oder Spiegel, auf die das einfallende Licht wirkt, groß ist gegenüber der Wellenlänge des Lichtes. Andernfalls finden die Beugungsgesetze der Wellenoptik ihre Anwendung.

Die geometrische Optik oder auch Strahlenoptik, deren mathematische Zusammenhänge nachfolgend genauer analysiert werden sollen, basiert auf der Feststellung, dass sich Lichtstrahlen in einem homogenen Medium gradlinig ausbreiten. Dies bedeutet, dass bei der Bestimmung der Reflexion, der Brechung oder Beugung des Lichts die geometrischen Gesetze der Mathematik angewendet werden können.

Betrachten wir die Reflexion des Lichtes. Die Definition besagt, dass der Betrag des Einfallswinkels  $\alpha$  und der Reflexionswinkel  $\beta$  zum Bezugslot gleich ist. Die Lichtstrahlen und das Lot liegen in einer Ebene. Das Lot ist die Winkelhalbierende der Gesamtwinkelsumme  $\alpha + \beta$ . Es trifft immer senkrecht auf die Reflexionsoberfläche.

$$\alpha = \beta$$

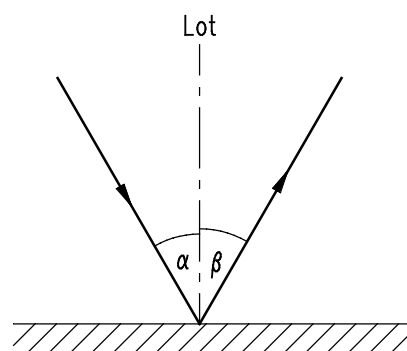
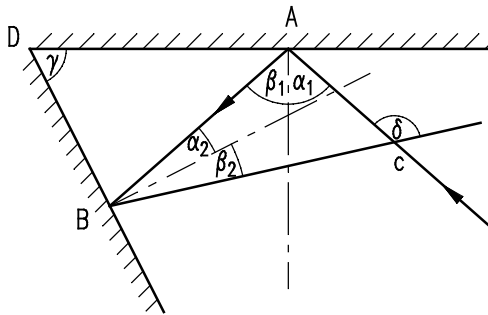


Abbildung 5 Reflexionsgesetz

Lehrbeispiel 1

Zwei ebene Spiegel sind, wie in folgender Abbildung aufgezeigt, so angeordnet, dass sie einen Lichtstrahl reflektieren sollen. Die Spiegel sind so montiert, dass sie einen Winkel  $\gamma = 45^\circ$  einschließen.

Wie groß ist der Ablenkungswinkel  $\delta$ ?

**Lösung**

Aus den reflektierten Lichtstrahlen und den Spiegeloberflächen sind zwei Dreiecke zu bilden. Unter Anwendung der Gesetze aus der Geometrie lassen sich die Winkel der Dreiecke bestimmen. Die Summe der eingeschlossenen Winkel in einem Dreieck beträgt  $180^\circ$ . Um die Aufgabe zu lösen, müssen mehrere voneinander unabhängige Gleichungen aufgestellt werden (Lösen einer Aufgabe mit mehreren Unbekannten). Danach muss versucht werden, durch Einsetz- oder Gleichsetzverfahren, die Terme zu vereinfachen.

Winkelsumme aus dem Dreieck ABC:

$$\alpha_1 = \beta_1$$

$$\alpha_2 = \beta_2$$

$$\text{I} \quad 180^\circ = 2 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + (180^\circ - \delta)$$

Winkelsumme aus dem Dreieck ABD:

$$\text{II} \quad 180^\circ = (90^\circ - \alpha_1) + (90^\circ - \alpha_2) + \gamma$$

Gegeben:  $\gamma = 45^\circ$

Gesucht:  $\delta$

$$\text{II} \quad 90^\circ + \alpha_1 = 90^\circ - \alpha_2 + \gamma$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2 + \gamma$$

$$\text{I} \quad 180^\circ = 2 \cdot (-\alpha_2 + \gamma) + 2 \cdot \alpha_2 + 180^\circ - \delta$$

$$\delta = -2 \cdot \alpha_2 + 2\gamma + 2 \cdot \alpha_2$$

$$\delta = 2 \cdot \gamma$$

$$\Rightarrow \delta = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$$

Bei der Brechung des Lichts fällt ein Lichtstrahl schräg auf eine Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Werkstoffen. Die Richtung des Lichtstrahls wird an dieser Stelle gebrochen, er wird abgelenkt. Zur Berechnung der Brechungswinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  wird eine einfache Verhältnisrechnung aufgestellt. Sie ist gleich der Lichtgeschwindigkeit  $c$  des einzelnen Mediums.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \text{konst.}$$

Die Konstante beschreibt gleichzeitig das umgekehrte Verhältnis der Brechzahlen  $n$  der Werkstoffe.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = \text{konst.}$$

Bei der Brechung des Lichts gibt es einen Grenzwinkel  $\alpha_g$ . Ab einem bestimmten Winkel wird das Licht nicht mehr gebrochen, sondern reflektiert.

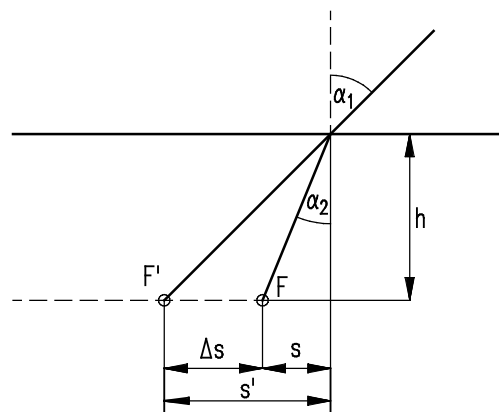
$$\sin \alpha_g = \frac{n_2}{n_1}$$

### Lehrbeispiel 2

In einem See schwimmt in einer Tiefe von 2,5 m ein Fisch F.

*Um welches Stück  $\Delta s$  erscheint der Fisch verschoben, wenn der Betrachter unter einem Winkel von  $45^\circ$  gegen die Wasseroberfläche blickt?*

Die Brechzahl der Luft beträgt  $n = 1$  und die des Wassers  $n = \frac{4}{3}$ .



**Lösung****Gegeben:**  $h = 2,5 \text{ m}$ 

$$\alpha_1 = 45^\circ$$

$$n_1 = 1$$

$$n_2 = \frac{3}{4}$$

**Gesucht:**  $\Delta s$ 

$$\Delta s = s' - s$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{s'}{h} \Rightarrow s' = h \cdot \tan \alpha_1$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{s}{h} \Rightarrow s = h \cdot \tan \alpha_2$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \alpha_2 = \arcsin \left( \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \alpha_1 \right)$$

$$\alpha_2 = \arcsin \left( \frac{3}{4} \cdot \sin 45^\circ \right) = 32^\circ$$

$$\Delta s = h \cdot \tan \alpha_1 - h \cdot \tan \alpha_2 = h \cdot (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)$$

$$\Delta s = 2,5 \text{ m} \cdot (\tan 45^\circ - \tan 32^\circ)$$

$$\Delta s = 0,938 \text{ m}$$

Das allgemeine Reflexionsgesetz gilt auch für gekrümmte Spiegelflächen. Die Besonderheit hierbei ist, dass Lichtstrahlen, die parallel zur optischen Achse auf einen Parabolspiegel treffen, so reflektiert werden, dass sie sich im Brennpunkt F schneiden und umgekehrt. Dieses Verfahren wird mithilfe von Linsen ausgenutzt, um reelle Größen virtuell zu verkleinern (Foto).

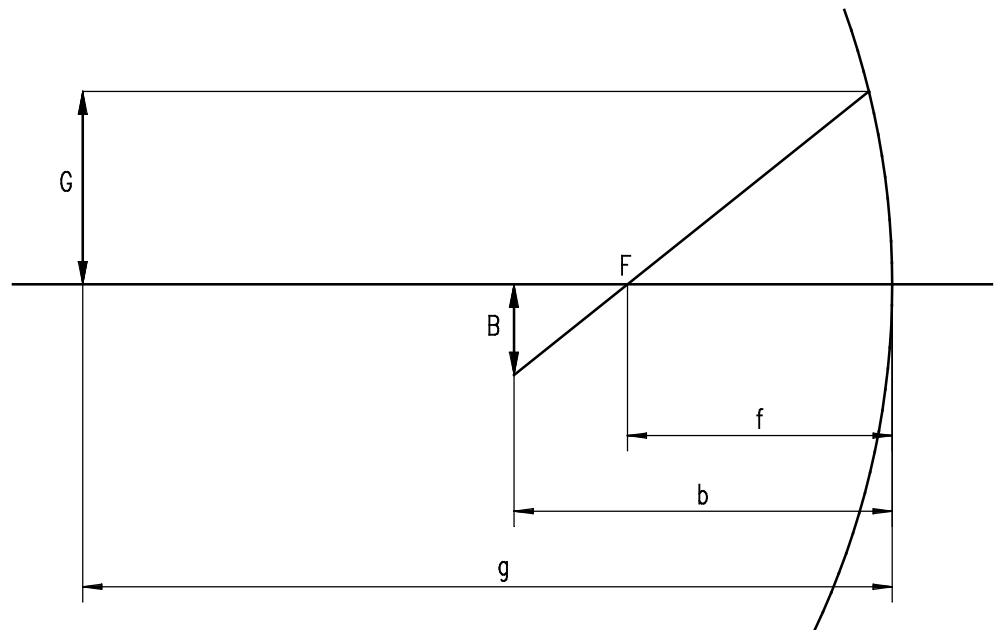


Abbildung 6 Abbildung eines Gegenstandes durch einen Hohlspiegel

Die Formeln zur Beschreibung der aufgezeigten Bedingung sind die Gesetze der Linienabbildung. Eine wichtige physikalische Größe ist die Brennweite  $f$ . Sie ist gleich dem halben Radius des Hohlspiegels. Der Kehrwert der Brennweite  $f$  ist gleich der Summe aus dem Kehrwert der Gegenstandsweite  $g$  und dem Kehrwert der Bildweite  $b$ .

$$f = \frac{1}{2} \cdot r$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

### Lehrbeispiel 3

Mithilfe einer Konvexlinse mit einer Brennweite von  $f = 20 \text{ cm}$ , soll ein Gegenstand reell abgeblendet werden. Die Entfernung vom Gegenstand zum Bild beträgt  $s = 1,2 \text{ m}$ .

*Berechnen Sie die Gegenstands- ( $g$ ) und Bildweite ( $b$ ) sowie das Abbildungsmaß ( $A$ )!*

$$A = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$



**Lösung****Gegeben:**  $f = 20 \text{ cm}$ 

$$s = 1,2 \text{ m}$$

**Gesucht:**  $b$ ;  $g$ ;  $A$ 

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

$$s = g + b \Rightarrow b = s - g$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{s-g} = \frac{s-g+g}{g \cdot (s-g)} = \frac{s}{g \cdot (s-g)}$$

$$g \cdot (s-g) = s \cdot f$$

$$g \cdot s - g^2 = s \cdot f$$

$$0 = g^2 - s \cdot g + s \cdot f \Rightarrow \text{Quadratische Gleichung}$$

$$g_{1,2} = -\frac{1}{2}(-s) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot s\right)^2 - s \cdot f}$$

$$g_1 = -\left(\frac{1}{2} \cdot (-120 \text{ cm})\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 120 \text{ cm}\right)^2 - 120 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}}$$

$$\underline{\underline{g_1 = 94,6 \text{ cm}}}$$

$$g_2 = -\left(\frac{1}{2} \cdot (-120 \text{ cm})\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 120 \text{ cm}\right)^2 - 120 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}}$$

$$\underline{\underline{g_2 = 25,4 \text{ cm}}}$$

$$b_1 = s - g_1 = 120 \text{ cm} - 94,6 \text{ cm}$$

$$\underline{\underline{b_1 = 25,4 \text{ cm}}}$$

$$b_2 = s - g_2 = 120 \text{ cm} - 25,4 \text{ cm}$$

$$\underline{\underline{b_2 = 94,6 \text{ cm}}}$$

$$A = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

$$A_1 = \frac{b_1}{g_1} = \frac{94,6 \text{ cm}}{25,4 \text{ cm}}$$

$$\underline{\underline{A_1 = 3,72}}$$

$$A_2 = \frac{b_2}{g_2} = \frac{25,4 \text{ cm}}{94,6 \text{ cm}}$$

$$\underline{\underline{A_2 = 0,268}}$$

**Aufgaben**

Die Problemstellung dieser Aufgabe liegt in dem Erkennen der quadratischen Gleichung.

$$0 = g^2 - s \cdot g + s \cdot f$$

Die Aufgabe ist damit nicht mehr eindeutig zu bestimmen. Es besteht somit die Möglichkeit, wie in unserem Beispiel, dass zwei Lösungen richtig sind. Der virtuell abgelichtete Gegenstand kann kleiner aber auch größer als das Original sein. Die Aufgabe muss somit weiter mit beiden Lösungsmöglichkeiten berechnet werden.

Aufgabe 1

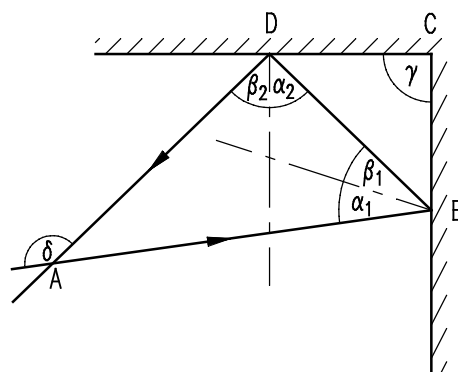
Formen Sie die nachfolgende Formel soweit um, sodass als Ergebnis der Ausdruck  $b =$  stehen bleibt!

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Aufgabe 2

Zwei ebene Spiegel sind, wie in nachfolgender Abbildung aufgezeigt, angeordnet und sollen einen Lichtstrahl reflektieren. Die Spiegel sind so montiert, dass sie einen Winkel  $\gamma = 90^\circ$  einschließen.

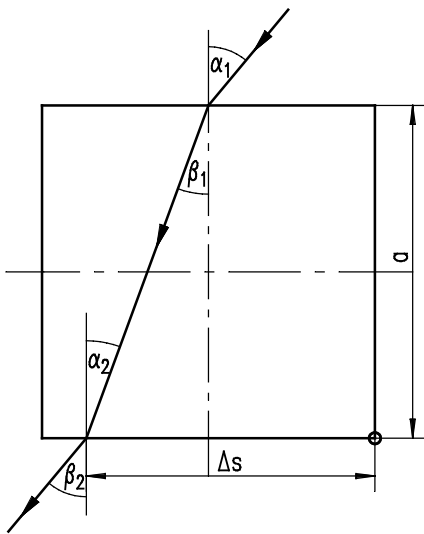
Wie groß ist der Ablenkungswinkel  $\delta$ ?



Aufgabe 3

Ein Glaswürfel mit einem Brechindex von  $n = 1,5$  wird von einem Lichtstrahl durchbrochen. Der Lichtstrahl tritt in der Mitte des Würfels unter einen Winkel von  $40^\circ$  in das Glas ein. Der Würfel hat die Abmaße von  $a = 10 \text{ cm}$ . (Brechzahl der Luft  $n = 1$ )

- 3.1 Berechnen Sie den Abstand  $\Delta s$  zwischen Austrittspunkt des Lichtstrahls und der Würfelkante A!
- 3.2 Berechnen Sie den Austrittswinkel  $\beta_2$  des Lichtstrahls!

Aufgabe 4

Ein Gegenstand mit der Größe  $G$  soll mit Hilfe einer Konvexlinse abgebildet werden. Der Abstand  $s$  zwischen Bild und Gegenstand beträgt:

$$s = g + b$$

- 4.1 Stellen Sie die Brennweite  $f$  als Funktion der Bildweite  $b$  dar!

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

- 4.2 Bestimmen Sie die Gegenstandsweite  $g$  und die Bildweite  $b$ , wenn die Brennweite  $f = \frac{1}{6} \cdot s = 40 \text{ cm}$  ist!

**Lernbereich**
**3 Problemstellungen aus dem Bereich der Mechanik**

Die Mechanik ist ein Teilgebiet der Physik. Sie wird untergliedert in die Bereiche Statik und Kinetik. Die Statik beschäftigt sich mit der Zusammensetzung und dem Gleichgewicht von Kräften auf einen ruhenden Körper. Im Gegensatz dazu wird die Kinetik als die Bewegungslehre bezeichnet, deren Bewegungsursache die Einwirkung von Kräften auf einen Körper ist.

**Die Statik**

Hier werden die Kräfte eines starren Systems genauer untersucht. Um eine Kraft eindeutig bestimmen zu können, muss sowohl der Betrag, der Richtungssinn und die Wirklinie der Kraft bekannt sein. Alle Größen, die durch ihren Betrag, den Richtungssinn und der Wirklinie eindeutig bestimmt werden können sind Vektoren. Die Kraft ist somit ein Vektor und unterliegt allen mathematischen Gesetzmäßigkeiten der Vektoren.

Die Definition der Kraft  $F$  lautet:

**Bei einer konstanten Masse  $m$  ist die Kraft  $F$  proportional der Momentanbeschleunigung  $a$ .**

$$F = m \cdot a$$

Aus den Zusammenhängen der Definition ist zu erkennen, dass bei einer konstanten Masse  $m$  nur die Beschleunigung  $a$  den Kraftvektor beeinflusst. Hieraus ist zu folgern, dass die Beschleunigung ebenfalls ein Vektor ist und nur mit ihrem Betrag, dem Richtungssinn und der Wirklinie eindeutig bestimmt werden kann. Die Beschleunigung unterliegt somit ebenfalls allen Gesetzmäßigkeiten der Vektorberechnung.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Ein Beispiel hierzu:

Wirkt auf einen Körper mit der Masse  $m$  eine konstante Kraft  $F$ , so wird der Körper nach der Überwindung seiner Trägheit beschleunigt. Der Richtungssinn und die Wirklinie der Beschleunigung ist gleich denen der Kraft. Der Betrag der Beschleunigung errechnet sich aus dem Betrag der Kraft dividiert durch die Masse.

$$|a| = \frac{|F|}{m}$$

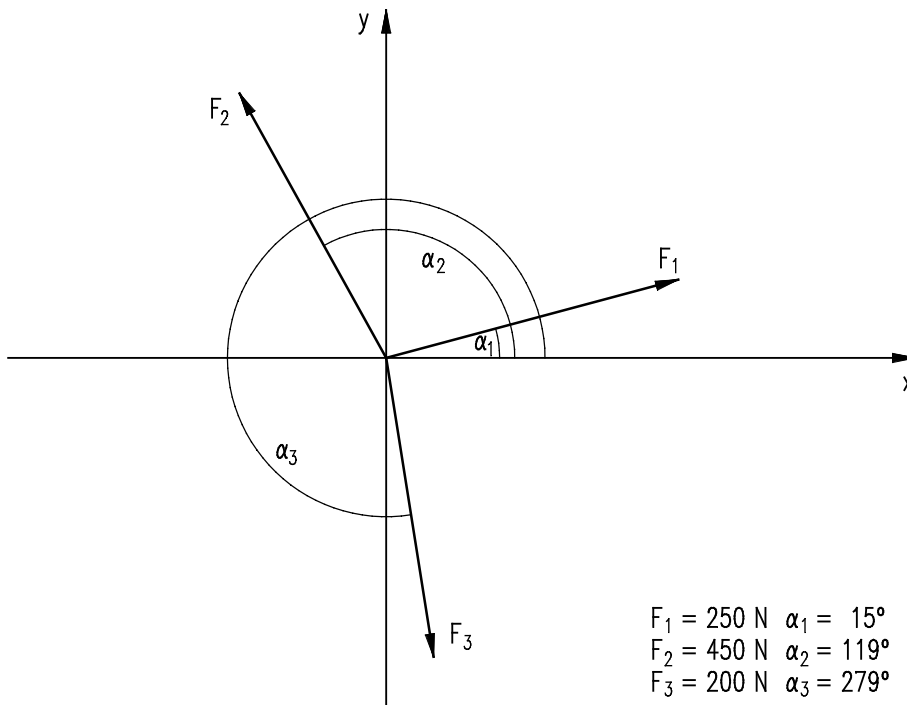
Bei der Rechnung mit Vektoren finden nicht nur die Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division Anwendung, sondern auch die trigonometrischen Funktionen. Hierzu das folgende Lehrbeispiel:

Lehrbeispiel 1

Auf einen punktuellen Körper wirken drei unterschiedliche Kräfte. Die z-Koordinate ist bei allen drei Kräften gleich und kann somit vernachlässigt werden.

*Berechnen Sie die Resultierende der drei anliegenden Kräfte, die auf den Körper wirkt!*

**Gegeben:**



**Gesucht:**

$F_R ; \alpha_R$

**Lösung**

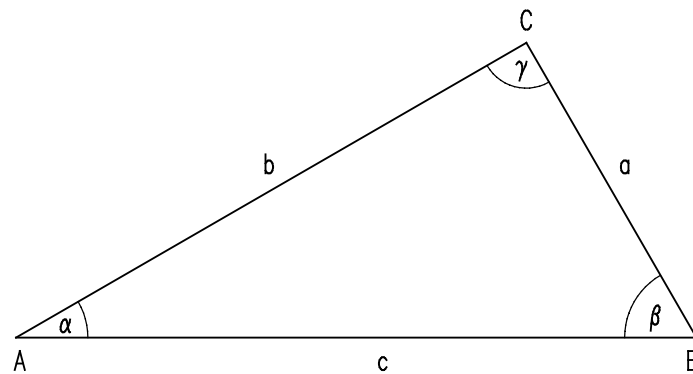
Aus den mathematischen Gesetzen zur Behandlung von Vektoren ist zu entnehmen, dass die Summe aller einzelnen Vektoren, die auf einen Punkt wirken, die Resultierende oder den Gesamtvektor ergibt.

$$\vec{F}_R = \sum_n \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

Ein räumlicher Vektor lässt sich durch seine x-, y-, und z-Koordinaten ausdrücken.

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

Wird nicht von einem Vektor im Raum, sondern von einem Flächenvektor ausgegangen, so kann die z-Koordinate vernachlässigt werden. Wird der Kraftvektor nun in seine x- und y-Komponenten zerlegt, so ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck. Somit finden die mathematischen Gesetze der Trigonometrie ihre Anwendung. Dies sind die drei Winkelfunktionen und der Satz des Pythagoras.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ$$

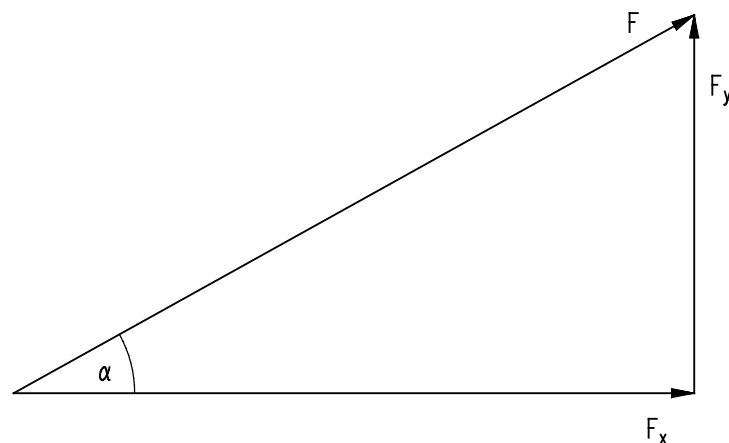
$$\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}; \cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}; \tan \beta = \frac{b}{a}$$

Nachfolgend sind die Grundfunktionen auf die x- und y-Koordinaten des zerlegten Kraftvektors angewendet worden. Die wichtigsten Gleichungen zur Bestimmung der Kraft sind noch einmal aufgezeigt.



Der Betrag der Kraft lässt sich zerlegen in:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2$$

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

Der Winkel der Kraft errechnet sich aus:  $\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x}$

Mit diesen aufgezeigten mathematischen Zusammenhängen lässt sich die physikalische Problemstellung lösen:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 250 \text{ N} \cdot \cos 15^\circ = 241,5 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 250 \text{ N} \cdot \sin 15^\circ = 64,7 \text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 450 \text{ N} \cdot \cos 119^\circ = -218,2 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 450 \text{ N} \cdot \sin 119^\circ = 393,6 \text{ N}$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 200 \text{ N} \cdot \cos 279^\circ = 31,3 \text{ N}$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 200 \text{ N} \cdot \sin 279^\circ = -197,5 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$F_{Rx} = 241,5 \text{ N} - 218,2 \text{ N} + 31,3 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = 54,6 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

$$F_{Ry} = 64,7 \text{ N} + 393,6 \text{ N} - 197,5 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = 260,8 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(54,6 \text{ N})^2 + (260,8 \text{ N})^2}$$

$$\underline{\underline{F_R = 266,5 \text{ N}}}$$

Der Vektor befindet sich im ersten Quadranten.

$$\alpha_R = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \arctan \frac{260,8 \text{ N}}{54,6 \text{ N}}$$

$$\alpha_R = 78,2^\circ$$

Das Drehmoment  $M$  eines Kräftepaars ist ebenso wie die Kraft  $F$  und die Beschleunigung  $a$  ein Vektor. Es kann somit auch nur eindeutig bestimmt werden, wenn der Richtungssinn, die Wirklinie und der Betrag bekannt ist. Das Moment  $M$  ist das Produkt einer Kraft  $F$  und dem Wirkabstand  $l$ , auf dem die Kraft wirkt.

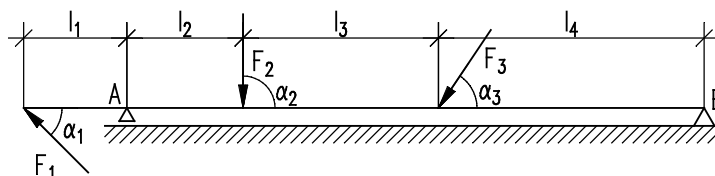
$$\vec{M} = \vec{F} \cdot l$$

Auch hier können die Aufgabenstellungen wieder mit den vier Grundrechenarten und den trigonometrischen Funktionen gelöst werden. Zusätzlich muss die Lösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten angewendet werden. Wenn zum Beispiel alle Kräfte ermittelt werden sollen, die auf Körper wirken, um diesen in Gleichgewicht zu halten, so müssen mehrere Gleichungen aufgestellt werden.

### Lehrbeispiel 2

Auf einen Balken wirken mehrere Kräfte wie in der Skizze gezeigt.

Berechnen Sie die Auflagerkräfte in den Punkten A und B!



#### Gegeben:

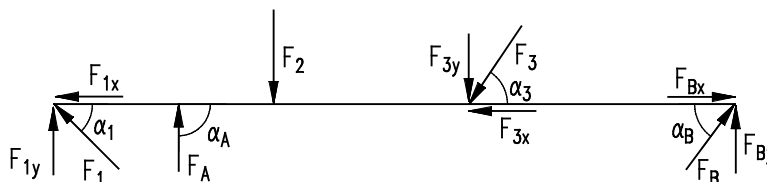
$F_1 = 150 \text{ N}$	$\alpha_1 = 70^\circ$	$l_1 = 1,5 \text{ m}$
$F_2 = 1,5 \text{ kN}$	$\alpha_2 = 90^\circ$	$l_2 = 2 \text{ m}$
$F_3 = 2 \text{ kN}$	$\alpha_3 = 60^\circ$	$l_3 = 2 \text{ m}$
		$l_4 = 4 \text{ m}$

#### Gesucht:

$$F_A; F_B; \alpha_A; \alpha_B$$

#### Lösung

Als Erstes muss das Bauteil freigemacht werden. Das bedeutet, dass die unbekannten Kräfte in den Lagern A und B bestimmt werden müssen.



$$\alpha_A = 90^\circ \text{ da Loslager}$$

$$\Rightarrow F_{Ax} = 0 \text{ N}$$

Danach muss die Gleichgewichtsbedingung aufgestellt werden.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_{(P)} = 0$$

$$\sum F_x = 0 = -F_{1x} - F_{3x} + F_{Bx}$$

$$\sum F_y = 0 = F_{1y} + F_A - F_2 - F_{3y} + F_{By}$$

$$\sum M_{(B)} = 0 = F_{1y} \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + F_A \cdot (l_2 + l_3 + l_4) - F_2 \cdot (l_3 + l_4) - F_{3y} \cdot l_4$$

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$



Nach dem Aufstellen der Gleichungen werden sie der Reihe nach gelöst und zum Schluss die unbekannten Kräfte mit Betrag, Richtungssinn und Wirklinie ermittelt.

$$\Rightarrow F_A = \frac{-F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + F_2(l_3 + l_4) + F_3 \cdot \sin \alpha_3 \cdot l_4}{(l_2 + l_3 + l_4)}$$

$$F_A = \frac{-150 \text{ N} \cdot \sin 70^\circ \cdot 9,5 \text{ m} + 1500 \text{ N} \cdot 6 \text{ m} + 2000 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ \cdot 4 \text{ m}}{8 \text{ m}}$$

$$\underline{\underline{F_A = 1823,6 \text{ N}}}$$

$$F_{Bx} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 150 \text{ N} \cdot \cos 70^\circ + 2000 \text{ N} \cdot \cos 60^\circ$$

$$F_{Bx} = 1051,3 \text{ N}$$

$$F_{By} = -F_1 \cdot \sin \alpha_1 - F_A + F_2 + F_3 \cdot \sin \alpha_3$$

$$F_{By} = -150 \text{ N} \cdot \sin 70^\circ - 1823,6 \text{ N} + 1500 \text{ N} + 2000 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ$$

$$\underline{\underline{F_{By} = 1267,5 \text{ N}}}$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{(1051,3 \text{ N})^2 + (1267,5 \text{ N})^2}$$

$$\underline{\underline{F_B = 1646,8 \text{ N}}}$$

$$\alpha_B = \arctan \frac{F_{By}}{F_{Bx}} = \arctan \frac{1267,5 \text{ N}}{1051,3 \text{ N}}$$

$$\underline{\underline{\alpha_B = 50,3^\circ}}$$

Wie aufgezeigt, lassen sich mit den nur wenigen bis hier beschriebenen mathematischen Kenntnissen eine Vielzahl von physikalischen Zusammenhängen in der Statik klären. Es müssen nur die physikalischen Größen aus der Aufgabenstellung richtig zugeordnet werden.

## Die Kinetik

Die Kinetik ist die Lehre der bewegten Körper. Hier werden zur Veranschaulichung die verschiedenen physikalischen Größen der Bewegung in Diagramme gezeigt. Die aufgezeigten Kennlinien werden dann mit Funktionen beschrieben. Die Art der Funktion gibt Auskunft über die Bewegungsart. In der Kinetik wird auf der x-Koordinate der Diagramme meist die Zeit  $t$  abgetragen. Auf der y-Koordinate wird die zu beobachtende Größe wie Wegstrecke  $s$ , Geschwindigkeit  $v$  oder die Beschleunigung  $a$  abgetragen. Die Diagramme werden als Weg-Zeit-Diagramm ( $v$ -t-Diagramm), Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ( $v$ -t-Diagramm) und Beschleunigungs-Zeit-Diagramm ( $a$ -t-Diagramm) bezeichnet. Die allgemeine Aussage einer Funktion, bezogen auf ein x-y-Koordinatensystem besagt, dass  $y$  eine Funktion von  $x$  ist.

$$y = f(x)$$

Wird eine Beziehung zu den angegebenen Diagrammen aufgestellt, so ergibt sich hieraus:

Weg-Zeit-Diagramm:  $s = f(t)$

Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm:  $v = f(t)$

Beschleunigungs-Zeit-Diagramm:  $a = f(t)$

Nachfolgend werden die Diagramme von zwei Fällen der Beschleunigung, anhand der Kennlinien, genauer untersucht. Dies ist die gleichförmige und die gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit.

### Gleichförmige gradlinige Bewegung

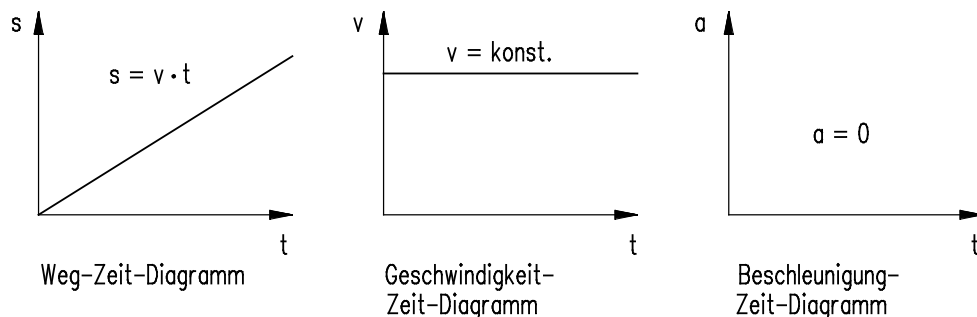


Abbildung 7 Diagramme zur gleichförmig gradlinigen Bewegung

### Gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit

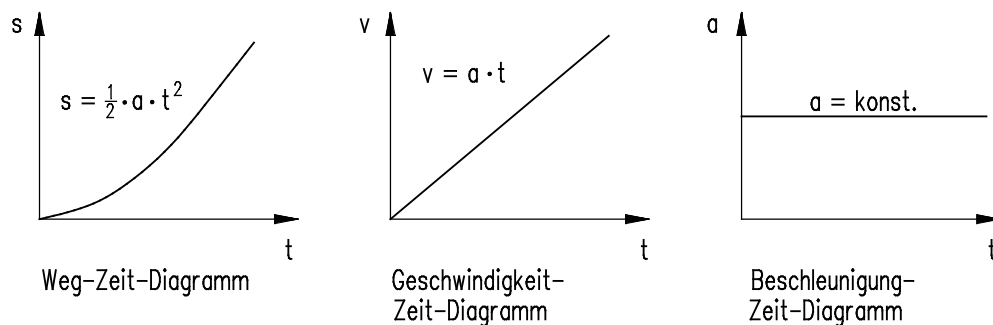
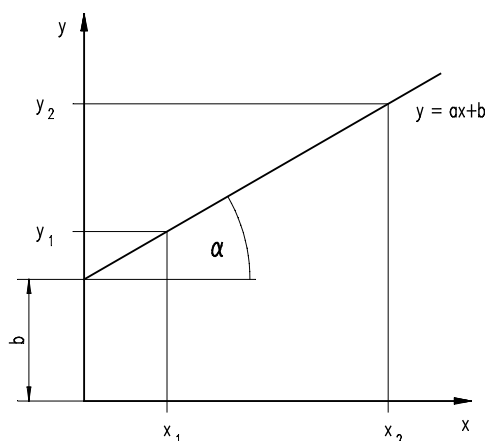


Abbildung 8 Diagramme zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Aus den oben beschriebenen Grafen sind zwei Typen von mathematischen Funktionen zu erkennen. Dies ist zum einen die lineare Funktion und zum anderen die quadratische Funktion. Beide werden wie folgt allgemein beschrieben:

### Lineare Funktion

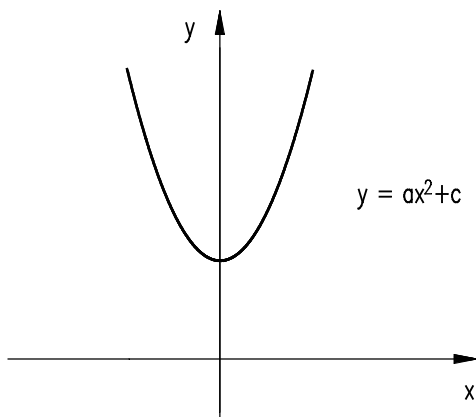


$$y = a \cdot x + b \quad (\text{Funktion})$$

$$a = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{Steigung des Grafen})$$

$$b = y\text{-Wert bei } x = 0 \quad (\text{x-Nulldurchgang des Grafen})$$

## Quadratische Funktion



$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad (\text{Funktion})$$

$$c = y\text{-Wert bei } x = 0 \quad (\text{x-Nulldurchgang des Grafen})$$

Das Weg-Zeit-, Geschwindigkeit-Zeit- bzw. Beschleunigung-Zeit-Diagramm in Abbildung 7 zeigt jeweils verschiedene Verläufe der linearen Funktion.

Beim Weg-Zeit-Diagramm ist  $b = 0$ . Das bedeutet, dass keine Anfangsstrecke berücksichtigt werden muss. Die zurückgelegte Wegstrecke steigt linear, auf Grund der konstanten Geschwindigkeit.

$$s = f(t) = v \cdot t$$

Bei dem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm verhält sich die Funktion anders. Sie ist zwar linear, doch da sich der Wert der Geschwindigkeit über die Zeit nicht ändert, hat die Funktion keine Steigung ( $a = 0$ ). Der Nulldurchgang des Grafen mit der y-Achse ist ungleich Null ( $b \neq 0$ ). Der bewegte Körper, der betrachtet wird, hat eine Anfangsgeschwindigkeit ( $v_0 = b$ ).

$$v = f(t) = v_0$$

Im Beschleunigung-Zeit-Diagramm ist bei konstanter Geschwindigkeit die Beschleunigung über die Zeit gleich Null ( $a = 0$ ). Die Faktoren  $a$  und  $b$  der Funktion sind somit gleich Null.

$$a = f(t) = 0$$

Der Graf des Weg-Zeit-Diagramms der gleichförmig beschleunigten Bewegung hat den Verlauf einer Quadratischen Gleichung. Aber dieser Graf ist eine Sonderfunktion. Der Anteil  $b \cdot x$  ist gleich Null. Hieraus folgt:

$$y = a \cdot x^2 + c$$

Bei den in Abbildung 8 beschriebenen Grafen ist der Wert  $c = 0$ . Hieraus folgt, dass bei konstanter Beschleunigung die Wegstrecke  $s$  sich quadratisch zur Zeit  $t$  verhält. Der Graf wird als Parabel bezeichnet.

$$s = f(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Als nächstes wird die Flugbahn eines Körpers mathematisch analysiert, der senkrecht in die Luft geworfen wird und nach Erreichen der maximalen Höhe wieder zur Erde

fällt. Der Luftwiderstand wird hierbei nicht berücksichtigt. Abbildung 9 zeigt den Verlauf der Wurfbahn in Abhängigkeit zu der Zeit.

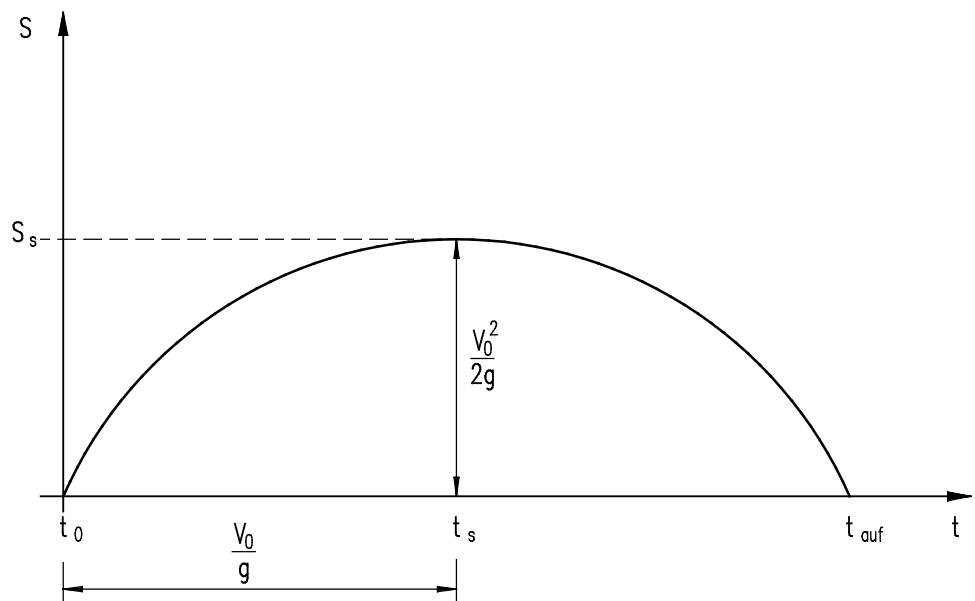


Abbildung 9 Senkrechter Wurf

Der Verlauf des Grafen im Weg-Zeit-Diagramm des senkrechten Wurfs ist ebenfalls gleich einer quadratischen Funktion. Sie wird wie folgt beschrieben:

$$s = f(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

Da sich der Abwurf- und der Aufschlagpunkt auf der gleichen Höhe befindet ( $c = 0$ ), sind beide Punkte des Grafen Schnittpunkte mit der x- bzw. Zeitachse.

Unter Zuhilfenahme der Nullstellenanalyse können die Gleichungen gelöst werden.

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

$$x_{01} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{02} = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Ein weiterer wichtiger Punkt des Grafen ist der Scheitelwert. Er gibt das Maximum bzw. Minimum der Funktion in y-Richtung an. Bei unserem Beispiel kann mit dem Scheitelwert die Steighöhe errechnet werden.

Allgemeine Berechnung des Scheitelpunkts:

$$y = x^2 + b \cdot x + c$$

Durch die Anwendung der quadratischen Ergänzung entsteht der folgende Ausdruck:

$$y = x^2 + bx + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 + c - \left(\frac{1}{2}b\right)^2$$

$$y = \left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 + c - \left(\frac{1}{2}b\right)^2$$

Der Scheitelpunkt liegt bei:

$$x_s = -\frac{1}{2}b \quad y_s = c - \frac{1}{4}b^2$$

### Lehrbeispiel 3

*Berechnen Sie die Flugzeit eines Körpers, der mit einer Anfangsgeschwindigkeit von  $v_0 = 25 \text{ m/s}$  senkrecht in die Höhe geworfen wird!*

Der Abwurf- und der Aufschlagpunkt liegen in der gleichen Höhe ( $s = 0$ ). Der Luftwiderstand während des Fluges kann vernachlässigt werden. Die Erdbeschleunigung beträgt  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

*Berechnen Sie außerdem die maximale Flughöhe!*

### **Lösung**

Gegeben:

$$v_0 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Gesucht:  $t$

$$h = s = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t \quad \text{bei } s = 0$$

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

$$0 = t^2 - \frac{2 \cdot v_0}{g} \cdot t$$

$$p = -\frac{2 \cdot v_0}{g} = -\frac{2 \cdot 25 \text{ m} \cdot \text{s}^2}{\text{s} \cdot 10 \cdot \text{m}} = -5 \text{ s}$$

$$q = 0$$

$$t_{01} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-5 \text{ s}}{2} + \sqrt{\left(\frac{-5 \text{ s}}{2}\right)^2}$$

$$\underline{\underline{t_{01} = 5 \text{ s}}}$$

$$t_{02} = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-5 \text{ s}}{2} - \sqrt{\left(\frac{-5 \text{ s}}{2}\right)^2}$$

$$\underline{\underline{t_{02} = 0 \text{ s}}}$$

Die Flugzeit ist gleich der Zeit  $t_{01}$ .

$$t_{\text{Flug}} = t_{01} = 5 \text{ s}$$

Berechnung der maximalen Flughöhe  $s_s$  durch quadratische Ergänzung

$$s = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

$$\Leftrightarrow s = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left( t^2 - \frac{2 \cdot v_0}{g} \cdot t \right)$$

$$\Leftrightarrow s = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left[ \left( t - \frac{v_0}{g} \right)^2 - \left( \frac{v_0}{g} \right)^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow s = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left( t - \frac{v_0}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

Die maximale Flughöhe  $s_s$  ist gleich dem Scheitelwert der Parabel

$$s_s = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} = \frac{(25 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2} = 31,25 \text{ m}$$

Die maximale Höhe wird nach der Zeit

$$t_s = \frac{v_0}{g} = \frac{25 \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}^2} = 2,5 \text{ s erreicht.}$$

Eine alternative und zugleich universellere Möglichkeit zur Berechnung der maximalen Flughöhe bietet die Differenzialrechnung, indem mithilfe der Ableitung der Funktion  $s(t)$  ein lokales Maximum ermittelt wird.

## Kreisbewegung

Um eine Kreisbewegung eines Rades eindeutig bestimmen zu können, muss die mathematische Flächenberechnung und der Bezug zum Winkel eines Kreises bekannt sein.

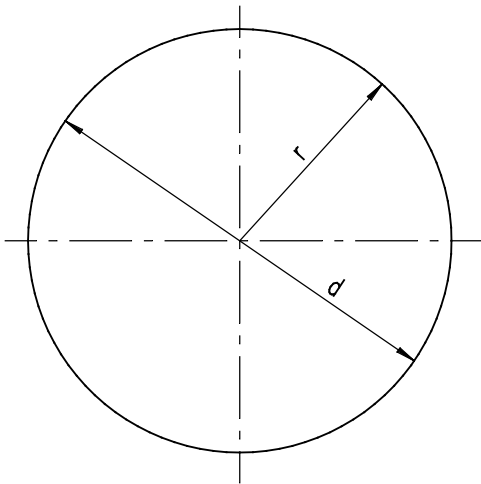


Abbildung 10 Allgemeine Flächenberechnung eines Kreises

$$A = \pi \cdot r^2 = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$U = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$$

Die Umfangsgeschwindigkeit  $v$  eines Kreises ist an jedem Punkt des Umfanges gleich groß. Sie ist abhängig von der Drehzahl  $n$  und dem Umfang eines Kreises. Die Drehzahl errechnet sich aus den vollen Umdrehungen  $u$  pro einem definierten Zeitabschnitt. Hieraus folgt:

$$v = U \cdot n = d \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot n$$

$$n = \frac{u}{t}$$

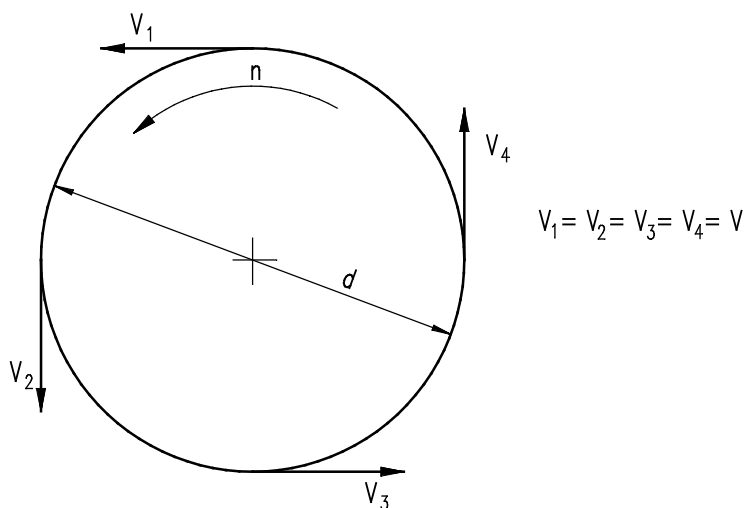


Abbildung 11 Kreisbewegung

Aber auch die Kreisbewegung wird wieder mit der Zeit  $t$  in Verbindung gebracht. Hierdurch lassen sich die Formeln für die Umlaufzeit  $T$ , die Frequenz  $f$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  aufstellen.

$$T = \frac{1}{n}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

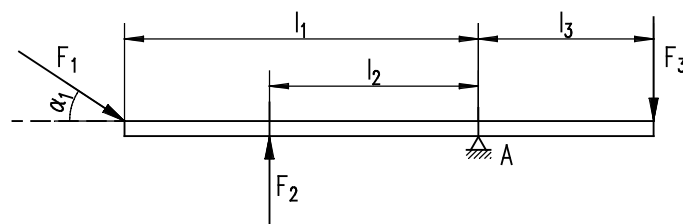
$$v = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{1}{T} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot f$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

### Aufgaben

#### Aufgabe 1

Ein zweiarmiger Hebel ist wie in der Abbildung beschrieben belastet. Die Kräfte, die auf den Hebel wirken, haben die folgenden Größen:



$F_1 = 400 \text{ N}$	$\alpha_1 = 45^\circ$	$l_1 = 3 \text{ m}$
$F_2 = 250 \text{ N}$		$l_2 = 1,5 \text{ m}$
$F_3 = 500 \text{ N}$		$l_3 = 2 \text{ m}$

*Berechnen Sie den Betrag und den Winkel der Stützkraft!*

**Hinweis:** Die Stützkraft ist annähernd gleich der Resultierenden der drei Kräfte. Ihr Richtungssinn ist nur entgegengesetzt.



Aufgabe 2

Ein PKW verbraucht auf einer Strecke von 100 km 8 l Benzin.

- 2.1 *Stellen Sie den Benzinverbrauch als Funktion der zurückgelegten Wegstrecke auf!*
- 2.2 *Berechnen Sie anhand der Funktion die Entfernung, die der PKW mit einer Tankfüllung von 45 l zurücklegen kann!*
- 2.3 *Zeichnen Sie den Grafen der Funktion  $V_B = f(s)$ !*

Aufgabe 3

Ein Stein wird aus einer Höhe von zwei Meter mit einer Anfangsgeschwindigkeit von  $v_0 = 10 \text{ m/s}$  senkrecht in die Höhe geworfen. Die Erdbeschleunigung beträgt  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- 3.1 *Stellen Sie den Flugweg als Funktion der Zeit dar (Quadratische Funktion  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ )!*
- 3.2 *Berechnen Sie die Steigzeit, die Steighöhe und die gesamte Flugzeit!*
- 3.3 *Stellen Sie die Grafen im Diagramm qualitativ dar!*

Aufgabe 4

Ein Rad mit einer Anfangsgeschwindigkeit von  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  wird eine Zeit  $t_B = 2 \text{ s}$  gleichförmig beschleunigt  $a = 1 \text{ m/s}^2$ . Danach erfährt das Rad für eine Sekunde keine Beschleunigung. Nach dieser Zeit von 3 s wird das Rad gebremst und kommt innerhalb von  $t = 2 \text{ s}$  zum Stehen (negative Beschleunigung). Das Rad hat einen Durchmesser von 30 cm.

- 4.1 *Berechnen Sie den zurückgelegten Weg des Rades!*
- 4.2 *Zeichnen Sie das Weg-Zeit-, das Geschwindigkeit-Zeit- und das Beschleunigung-Zeit-Diagramm!*

**Lernbereich**
**4 Problemstellungen aus dem Bereich der Wärmelehre**

Wärme ist eine Form von Energie. Man unterscheidet sie als reine Energieart oder als Energieträger. Um die physikalischen Größen der Wärme mathematisch zu bestimmen, müssen die einzelnen Größen quantitativ und qualitativ erfasst werden. Die quantitative Bestimmung erfolgt über die Menge der rationalen Zahlen aus der Mathematik. Hieraus ergibt sich das Bindeglied zwischen der Physik und der Mathematik.

Die Mischtemperatur  $\vartheta$  berechnet sich aus der Menge der gemischten Stoffe ( $m_1$  und  $m_2$ ), der Temperatur der Stoffe vor der Mischung ( $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$ ) und ihrer spezifischen Wärmekapazität ( $c_1$  und  $c_2$ ).

Die Mischformel soll so umgestellt werden, sodass mit ihr die Mengen der Stoffe errechnet werden kann.

$$\vartheta = \frac{m_1 \cdot c_1 \cdot \vartheta_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot \vartheta_2}{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}$$

$$\vartheta \cdot (m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2) = m_1 \cdot c_1 \cdot \vartheta_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot \vartheta_2$$

$$\vartheta \cdot m_1 \cdot c_1 + \vartheta \cdot m_2 \cdot c_2 = m_1 \cdot c_1 \cdot \vartheta_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot \vartheta_2$$

$$\vartheta \cdot m_1 \cdot c_1 - m_1 \cdot c_1 \cdot \vartheta_1 = m_2 \cdot c_2 \cdot \vartheta_2 - m_2 \cdot c_2 \cdot \vartheta$$

$$m_1 \cdot (c_1 \cdot \vartheta - c_1 \cdot \vartheta_1) = m_2 (c_2 \cdot \vartheta_2 - c_2 \cdot \vartheta)$$

$$m_1 \cdot c_1 (\vartheta - \vartheta_1) = m_2 \cdot c_2 \cdot (\vartheta_2 - \vartheta)$$

$$m_1 = \frac{m_2 \cdot c_2 \cdot (\vartheta_2 - \vartheta)}{c_1 \cdot (\vartheta - \vartheta_1)}$$

$$m_2 = \frac{m_1 \cdot c_1 \cdot (\vartheta - \vartheta_1)}{c_2 \cdot (\vartheta_2 - \vartheta)}$$

Anhand des Beispiels wurde aufgezeigt, dass die physikalischen Größen als ein normaler Term, wie alle Zahlen aus der Menge der rationalen Zahlen, betrachtet werden kann und somit alle Rechenschritte ihre Gültigkeit behalten. In dem beschriebenen Fall sind es die Grundrechenarten, die Klammersetzung und das Bruchrechnen.

Die physikalische Größe Temperatur beschreibt den Wärmezustand eines Stoffes. Sie hat aber eine mathematische Besonderheit und zwar ist dies der untere Grenzwert. Dieser Grenzwert ist eine natürliche physikalische Grenze, die nicht unterschritten werden kann. Diese qualitative Grenze ist einzig abhängig von der quantitativen Aussage. Temperaturen werden in Grad Celsius ( $\vartheta$  in  $^{\circ}\text{C}$ ), Grad Fahrenheit ( $\vartheta_F$  in  $^{\circ}\text{F}$ ) oder Kelvin ( $T$  in  $\text{K}$ ) angegeben. Die quantitativen Aussagen in Fahrenheit haben nachfolgend keine so große Bedeutung und werden nicht weiter betrachtet. Der beschriebene Grenzwert wird in der Physik als der **absolute Nullpunkt** bezeichnet. Er liegt bei  $\vartheta_N = -273,16^{\circ}\text{C}$  oder  $T_N = 0\text{ K}$ . Die quantitative Aussage der Temperatur ist somit eine Zahl aus der Menge der rationalen Zahlen in einem theoretischen Bereich von:

$$-273,16 \leq \vartheta < \infty$$

$$0 \leq T < \infty$$

Aber praktisch ist auch die Obergrenze begrenzt.

Ein Maß für die in einem Körper enthaltene Wärme (Energie) ist die Wärmemenge  $Q$ . Sie gibt Auskunft, wie viel Wärmeenergie in einem Körper, mit einer konstanten Masse  $m$ , und der spezifischen Wärmekapazität  $c$  des Körpers, bei einer bestimmten Temperatur  $T$  in Kelvin gespeichert ist. Die absolute Wärmemenge errechnet sich aus:

$$Q = m \cdot c \cdot T$$

Bei einem Experiment, das diese Theorie beweisen soll, wird ein Körper betrachtet, dessen Masse und die zugehörige spezifische Wärmekapazität des Stoffes während des Versuchs konstant ist. Wird nun die Gleichung zur Berechnung der Wärmemenge rein mathematisch betrachtet, so ist zu sehen, dass bei konstanter Masse  $m$  und spezifischer Wärmekapazität  $c$  die Wärmemenge eine Funktion von der Temperatur ist.

$$Q = f(T)$$

Es handelt sich hierbei um eine lineare Funktion:

$$y = a \cdot x + b$$

Der Faktor  $a$  und der Summand  $b$  der linearen Funktion soll genauer untersucht werden. Die geringste Temperatur, die erreicht werden kann, liegt beim absoluten Nullpunkt bei Null Kelvin ( $T = 0 \text{ K}$ ). Hieraus folgt, dass der Nulldurchgang beim Schnittpunkt zwischen  $x$ - und  $y$ -Koordinate liegt. Der Summand  $b$  hat somit den Zahlenwert Null ( $b = 0$ ).

Die Funktion der Wärmemenge soll beim absoluten Nullpunkt etwas genauer untersucht werden.

$$\begin{aligned} Q_0 &= m \cdot c \cdot T && \text{bei } T = 0 \text{ K} \\ Q_0 &= 0 \text{ J} \end{aligned}$$

Unabhängig von der Masse und der Zusammensetzung des Stoffs eines Körpers, ist beim absoluten Nullpunkt die gespeicherte Wärmeenergie eines Körpers immer gleich Null ( $Q_0 = 0 \text{ J}$ ). Es sollte hier noch erwähnt werden, dass die Wärmekapazität über einen großen Temperaturbereich keine Konstante ist. Hier sollte der Mittelwert bevorzugt werden.

Die Steigung  $a$  der Funktion ist gleich dem Produkt aus der Masse  $m$  und der spezifischen Wärmekapazität  $c$ .

$$a = m \cdot c$$

Wird die Wärmemenge  $Q$  von Körpern untersucht, die zwar die gleiche Masse  $m$  haben, aber aus unterschiedlichen Stoffen bestehen, so ist festzustellen, dass die Wärmemenge nur von der spezifischen Wärmekapazität  $c$  abhängt. Dieser Wert ist aus Tabellenbüchern und Formelsammlungen zu entnehmen. Als ein Beispiel soll hier die Luft erwähnt werden. Sie hat eine spezifische Wärmekapazität von:

$$c = 1 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Aus Tabellenbüchern kann entnommen werden, dass die spezifische Wärmekapazität  $c$  von Stoffen in einem Bereich von

$$0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} < c < 15 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

liegt.

In dem nachfolgenden Diagramm sind drei unterschiedliche Kennlinien mit unterschiedlicher spezifischer Wärmekapazität  $c$  aufgezeigt

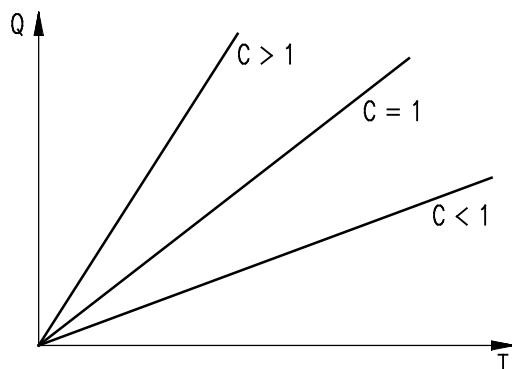


Abbildung 12 Wärmemenge-Temperatur-Diagramm

Bis zu diesem Abschnitt wurde die absolute Wärmemenge  $Q$  betrachtet. Dieser Wert hat in der Physik eine nicht so große Bedeutung. Bedeutsamer ist der Wert der Änderung der Wärmemenge  $\Delta Q$ , die auch als Energieänderung bezeichnet wird. Die Funktion zur Berechnung der Wärmemengenänderung ist ähnlich der Funktion zur Bestimmung der absoluten Wärmemenge. Die Energieänderung eines Körpers in Form von Wärme, wird nur von der Temperaturänderung  $\Delta T$  beeinflusst.

$$\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

Die Temperaturänderung errechnet sich aus der Anfangstemperatur ( $\vartheta_1$  oder  $T_1$ ) und der Endtemperatur ( $\vartheta_2$  oder  $T_2$ ). Die Temperaturänderung wird auch allgemein als Temperaturdifferenz  $\Delta T$  bezeichnet:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 \\ \Delta T = T_2 - T_1 \end{array} \right\} \Delta \vartheta = \Delta T$$

oder

$$\Delta \vartheta' = \vartheta_2' - \vartheta_1$$

$$\Delta T' = T_2' - T_1$$

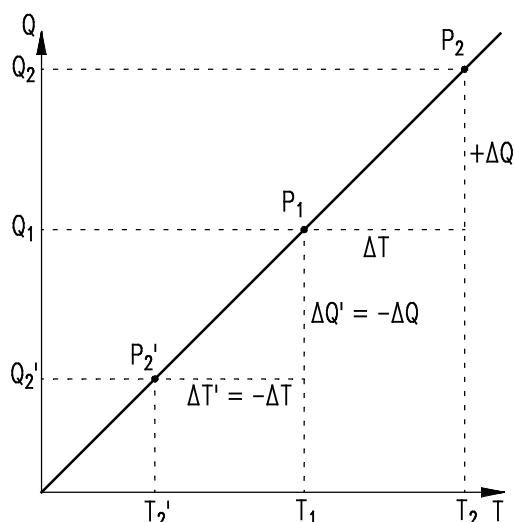


Abbildung 13 Diagramm zur Änderung der Wärmemenge bei einer Temperaturänderung

Aus dem Diagramm ist zu entnehmen, dass bei steigender Temperatur die Wärmemenge  $Q$  sich um den Betrag von  $\Delta Q$  erhöht und bei sinkender Temperatur um den Betrag von  $\Delta Q$  verringert.

$$\Delta T = \text{positiv} \Rightarrow \Delta Q = \text{positiv}$$

$$\Delta T = \text{negativ} \Rightarrow \Delta Q = \text{negativ}$$

Körper, die einer sich ändernden Temperatur ausgesetzt werden, verändern ihr Volumen. Bei festen Körpern ist aber nicht das Volumen, sondern die Längenänderung je Seitenansicht für die physikalische Berechnung von Interesse. Es wird hier von der Längenausdehnung  $\Delta l$  gesprochen. Bei flüssigen bzw. gasförmigen Körpern oder Stoffen ist wiederum die Volumenänderung bzw. die Volumenausdehnung  $\Delta V$  der physikalisch relevante Wert. Auch hier ist wieder nur die Änderung bzw. die Differenz zwischen Anfangs- und Endzustand die relevante Größe. Beide Ausdehnungsarten sind abhängig von der Temperatur und somit Funktionen von der Temperaturänderung  $\Delta \vartheta$ .

$$\Delta l = f(\Delta \vartheta) = \alpha \cdot l_1 \cdot \Delta \vartheta$$

$$\Delta V = f(\Delta \vartheta) = \beta \cdot V_1 \cdot \Delta \vartheta$$

Beide Gleichungen sind lineare Funktionen. Ihr Unterschied liegt einzig in der Steigung  $a$ . Die Steigung der Längenausdehnung setzt sich aus dem Produkt des Längenausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  und der Anfangslänge  $l_1$  des Körpers zusammen.

$$a = \alpha \cdot l_1$$

Die Steigung der Volumenausdehnung ist das Produkt aus dem Volumenausdehnungskoeffizienten  $\beta$  und dem Anfangsvolumen  $V_1$ .

$$a = \beta \cdot V_1$$

Mit diesen Werten der Längen- bzw. Volumenausdehnung können die exakten Anfangs- bzw. Endwerte errechnet werden.

$\Delta l = l_2 - l_1,$	$\Delta l' = l'_2 - l_1$	Längenänderung, Längendifferenz
$\Delta V = V_2 - V_1,$	$\Delta V' = V'_2 - V_1$	Volumenänderung, Volumendifferenz
$\Delta \vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1,$	$\Delta \vartheta' = \vartheta'_2 - \vartheta_1$	Temperaturänderung, Temperaturdifferenz
$\Delta T = T_2 - T_1,$	$\Delta T' = T'_2 - T_1$	

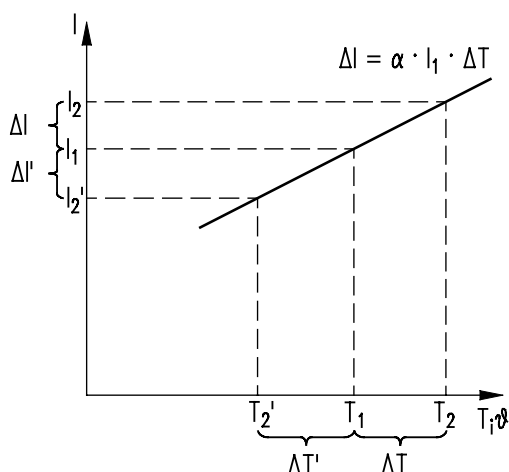


Abbildung 14 Diagramm zur Längenausdehnung

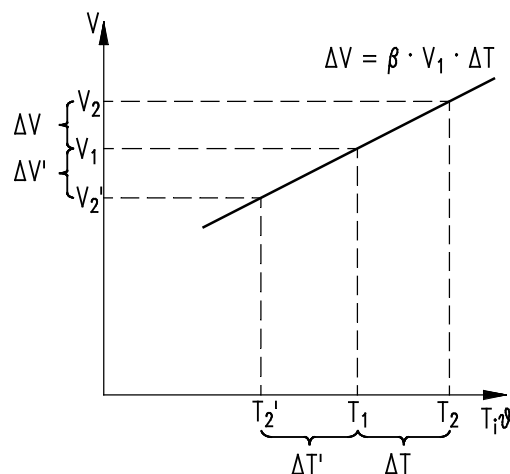


Abbildung 15 Diagramm zur Volumenausdehnung

### Lehrbeispiel 1

Ein Schwimmbad mit einer Länge von 15 m, einer Breite von 4 m und einer Tiefe von 2,5 m soll bei konstantem Wasserdruck von 15 °C auf eine Temperatur von 20 °C aufgeheizt werden. Der Raum ist bis zum Rand mit Wasser gefüllt.

*Wie viel Liter Wasser tritt während der Erwärmung aus dem Becken aus und muss aufgefangen werden?*

$$\beta_{\text{Wasser}} = 1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{K}}$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$$

### Lösung

Als Erstes müssen wieder die Daten aus dem Aufgabentext zugeordnet werden. Der Anfangs- und der Endwert der Temperatur sowie das Anfangsvolumen des Wassers ist durch die Abmaße des Raums angegeben.

$$\Delta \vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 = 20 \text{ °C} - 15 \text{ °C} = 5 \text{ K}$$

$$V_1 = l \cdot b \cdot h = 15 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m} = 150 \text{ m}^3$$

Die gesuchte Größe ist die Volumendifferenz bzw. die Volumenausdehnung  $\Delta V$ . Durch das Einsetzen der gewonnenen physikalischen Größen in die Formel für die Volumenausdehnung lässt sich die Aufgabe lösen.

$$\Delta V = \beta \cdot V_1 \cdot \Delta \vartheta = 1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{K}} \cdot 150 \text{ m}^3 \cdot 5 \text{ K}$$

$$\underline{\underline{\Delta V = 0,075 \text{ m}^3 = 75 \text{ dm}^3 = 75 \text{ l}}}$$

Es sollen nun einige Zustandsänderungen idealer Gase in einem geschlossenen System mathematisch betrachtet werden. Die physikalische Grundgleichung zur Berechnung der Zustände idealer Gase lautet:

$$\frac{p \cdot V}{T} = n \cdot R_m$$

$n$  : Anzahl der Gasteilchen  
 $R_m$  : allgemeine Gaskonstante

Bei der **isothermen Zustandsänderung** wird die Temperatur  $T$  konstant gehalten. Die allgemeine Zustandsformel idealer Gase bei konstanter Temperatur besagt:

$$p \cdot V = n \cdot R_m \cdot T = \text{konst.}$$

$$c = n \cdot R_m \cdot T$$

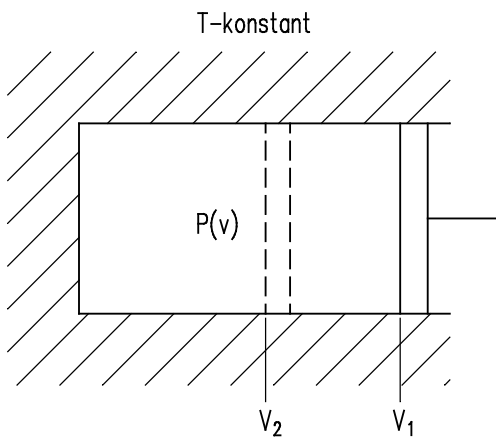


Abbildung 16 Realisierung der isothermen Zustandsänderung

Da in einem geschlossenen System, bei isothermer Zustandsänderung, die Anzahl der Gasteilchen, die allgemeine Gaskonstante und die Temperatur konstant bleiben, ergibt sich hieraus, dass der Druck  $p$  eine Funktion des Volumens  $V$  ist.

$$p = f(V)$$

$$p = c \cdot \frac{1}{V}$$

Die beschriebene Funktion hat die Form einer Hyperbel. Sie wird in der Mathematik allgemein beschrieben mit:

$$y = \frac{c}{x}$$

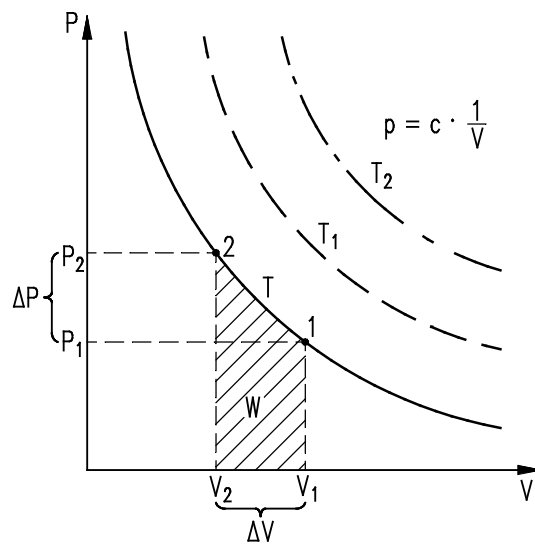


Abbildung 17 p-V-Diagramm einer isothermen Zustandsänderung

Die geleistete Arbeit zur Volumenänderung entspricht der Fläche unter der Kurve des p-V-Diagramms. Unter der Berücksichtigung, dass der Druck  $p$

$$p = n \cdot R_m \cdot T \cdot \frac{1}{V} \text{ ist,}$$

ergibt sich durch das Integrieren der Funktion:

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dv \\ W &= \int_{V_1}^{V_2} n \cdot R_m \cdot T \cdot \frac{1}{V} \cdot dv \\ W &= n \cdot R_m \cdot T \cdot \ln \frac{V_1}{V_2} \end{aligned}$$

Bei einer **isochoren Zustandsänderung** ist das Volumen als konstante Größe zu betrachten. Die zugehörige Zustandsformel lautet:

$$\begin{aligned} \frac{p}{T} &= \frac{n \cdot R_m}{V} = \text{konst.} \\ c &= \frac{n \cdot R_m}{V} \end{aligned}$$

$$p = f(V) = V = \text{konst.}$$

Das Kennlinienfeld des p-V-Diagramms entspricht dem wie in Abbildung 17, die Arbeitspunkte sind aber andere. Da das Volumen konstant ist, sind die Arbeitspunkte auf den unterschiedlichen Grafen der Temperatur  $T$  zu finden.



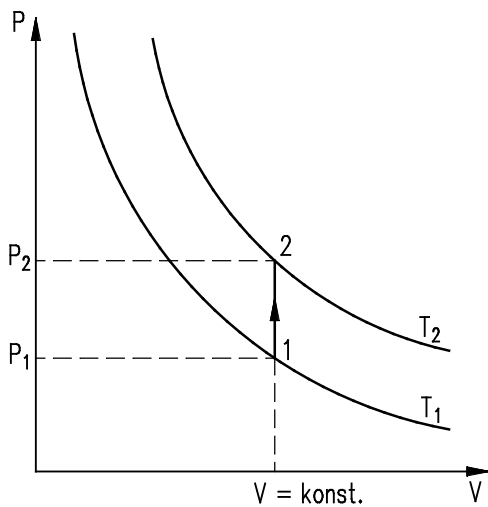


Abbildung 18 Isochore Zustandsänderung

Bei einer **isobaren Zustandsänderung** ist der Druck  $p$  als konstante Größe zu betrachten. Die Zustandsänderung lässt sich, ähnlich wie die beiden beschriebenen, mathematisch beschreiben.

$$\frac{V}{T} = \frac{n \cdot R_m}{p} = \text{konst.}$$

$$c = \frac{n \cdot R_m}{p}$$

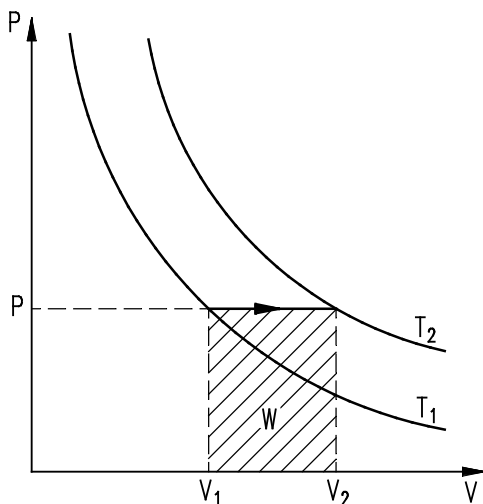


Abbildung 19 Isobare Zustandsänderung

Die Arbeit zur Volumenänderung entspricht wieder der Fläche unterhalb der p-V-Kurve.

$$W = p \cdot (V_1 - V_2)$$

Diese Arbeit ist bei einer Expansion negativ, was bedeutet, es gibt Arbeit nach außen ab.

### Lehrbeispiel 2

In einem luftdicht verschlossenen Behälter befindet sich ein Gas mit einer Temperatur von +20 °C.

*Auf welchen Wert muss die Temperatur ansteigen, damit sich der Druck verdoppelt?*

### Lösung

Aus der Aufgabe ist zu entnehmen, dass es sich um einen verschlossenen Behälter handelt und damit ist das Volumen  $V$  konstant. Es handelt sich somit um eine isochore Zustandsänderung. Die Anfangstemperatur  $T_1$  und die Druckänderung ist ebenfalls aus dem Text zu entnehmen.

$$T = 293 \text{ K}$$

$$p_2 = 2 \cdot p_1$$

$$V = \text{konst.}$$

Werden diese Aussagen in die zugehörige Formel zur Berechnung der Zustandsänderung eingesetzt, so lässt sich der Ausdruck des Drucks kürzen.

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \frac{2 \cdot p_1}{T_2} = \frac{n \cdot R_m}{V} = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{2 \cdot p_1 \cdot T_1}{p_1} = 2 \cdot T_1 = 2 \cdot 293 \text{ K}$$

$$\Rightarrow T_2 = 586 \text{ K}$$

$$\underline{\underline{\vartheta_2 = 313 \text{ °C}}}$$

Ein weiterer Funktionstyp in der Wärmelehre ist die Exponentialfunktion. Sie tritt bei der adiabatischen Zustandsänderung auf und stellt die physikalischen Größen Druck, Volumen und Temperatur in einen weiteren Zusammenhang. Diese Zusammenhänge beziehen sich auf eine **isentropen Zustandsänderung**.

$$p_1 \cdot V_1^{\kappa} = p_2 \cdot V_2^{\kappa}$$

$$p \cdot V^{\kappa} = k = \text{konst.}$$

Der Exponent ist der so genannte Adiabatenexponent und ist eine stoffabhängige Größe.

$$p = f(V) = \frac{k}{V^{\kappa}}$$

Der Kurvenverlauf der Funktion ist steiler als bei der isothermen Zustandsänderung.

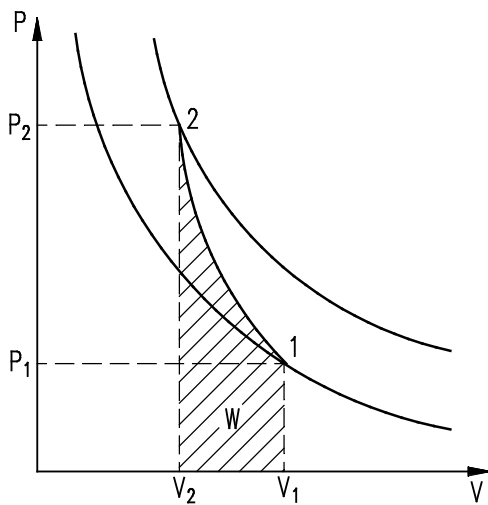


Abbildung 20 Isentrope Kompression

Durch die Integration der Fläche unterhalb der Kurve ergibt sich die Arbeit.

$$W = \frac{p_1 \cdot V_1}{\kappa - 1} \cdot \left[ \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right]$$

### Lehrbeispiel 3

Eine Luftfeder besteht aus einem luftdicht verschlossenen Zylinder mit einem Volumen  $V = 50 \text{ dm}^3$ . In dem Zylinder bewegt sich ein verschiebbarer Kolben.

Wie groß ist das Volumen der Luft, wenn sich der Druck nach einem Aufprall verdoppelt? ( $\kappa = 1,4$ )

### Lösung

$$\begin{aligned} p_1 \cdot V_1^\kappa &= p_2 \cdot V_2^\kappa \\ \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} \cdot V_1^\kappa &= \frac{p_1}{2p_1} \cdot V_1^\kappa = \frac{1}{2} V_1^\kappa = V_2^\kappa \\ \Rightarrow V_2 &= \sqrt[\kappa]{\frac{1}{2} \cdot V_1^\kappa} = \sqrt[1,4]{\frac{1}{2} \cdot 50^{1,4}} \text{ dm}^3 = \sqrt[1,4]{119,54} \text{ dm}^3 \\ &= \underline{\underline{30,5 \text{ dm}^3}} \end{aligned}$$

**Aufgaben**
Aufgabe 1

Stellen Sie die Formel für die Ermittlung der Mischtemperatur um, sodass Sie mit ihr die spezifische Wärmekapazität  $c_2$  errechnen!

$$\vartheta = \frac{m_1 \cdot c_1 \cdot \vartheta_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot \vartheta_2}{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}$$

Aufgabe 2

Eine Messingkugel hat bei einer Temperatur von 10 °C einen Durchmesser von 5 cm.

Auf welche Temperatur muss die Kugel erwärmt werden, um den Durchmesser um 0,1 mm zu erhöhen?

$$\alpha_{\text{Mes.}} = 19 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$$

$$\Delta l = \alpha \cdot l_1 \cdot \Delta T$$

Aufgabe 3

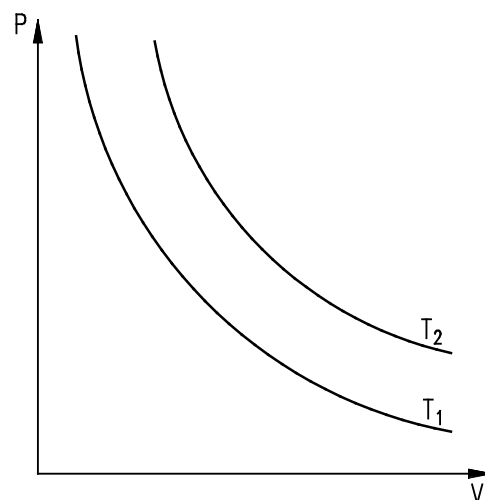
Bei einer isobaren Zustandsänderung ist der Druck  $p$  über den Betrachtungszeitraum konstant.

3.1 Stellen Sie die allgemeine Zustandsgleichung um, sodass sich hieraus die Gleichung für isobare Zustände ergibt!

$$\frac{p \cdot V}{T} = n \cdot R_m$$

3.2 Zeichnen Sie die isobare Expansion (Vergrößerung) qualitativ in das angegebene Kennlinienfeld! ( $p = \text{konst}$ )

3.3 Zeichnen Sie in das Kennlinienfeld die Volumenänderungsarbeit und geben Sie die zugehörige Formel an!



Aufgabe 4

Ein rechteckiger Raum mit einer Länge von 7 m, einer Breite von 5 m und einer Höhe von 2,5 m wird von 10 °C auf 25 °C erwärmt. Der Luftdruck bleibt während der Erwärmung konstant.

*Welches Volumen hat die Luft, die während der Erwärmung aus dem Raum entweicht?*

$$\Delta V = V_0 \cdot \beta \cdot \Delta T$$

$$\beta = 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{K}$$

Aufgabe 5

Eine Luftfeder besteht aus einem luftdicht verschlossenen Zylinder mit einer Länge von 600 mm und einem Durchmesser von 300 mm. In dem Zylinder bewegt sich ein verschiebbarer Kolben. Der Druck im entspannten Zustand beträgt bei 20 °C 1 bar.

*Wie groß ist der Druck im Zylinder und die Temperatur der Luft im Zylinder, wenn der Kolben bei einem Aufprall 400 mm eindringt?*

$$p_1 \cdot V_1^{\kappa} = p_2 \cdot V_2^{\kappa}$$

$$T_1 \cdot V_1^{\kappa-1} = T_2 \cdot V_2^{\kappa-1}$$

$$\kappa = 1,4$$

**Lernbereich**

## 5 Problemstellungen aus dem Bereich der Fertigungstechnik

Sichere mathematische und naturwissenschaftliche Kenntnisse sind auch in allen Bereichen der Fertigungstechnik Voraussetzung für eine kostengünstige, qualitäts- und termingerechte Arbeit. Das soll exemplarisch an folgenden Beispielen aufgezeigt werden:

1. Stanztechnik
2. Tiefziehen
3. Leistungsberechnung bei Zerspanungvorgängen

### Zu 1. Stanztechnik

Eine Firma, die u.a. Stanzteile fertigt, hat dafür eine Maschine, die maximal 350 kN zum Ausschneiden und/oder Lochen aufbringen kann.

Geschnitten werden soll ein Teil (vgl. Abbildung 23) jeweils aus einer bereits vorhandenen rechteckigen Platte mit den Maßen 90 mm x 75 mm.

- Der Technologe der Firma soll entscheiden, ob das in Abbildung 23 skizzierte Teil als Auftrag angenommen werden kann, ohne dass eine neue Maschine dafür angeschafft werden muss.
- Das Gewicht des geschnittenen Werkstücks soll als Angabe für die Stückliste bestimmt werden.
- Wie hoch wird der Abfall in % - bezogen auf eine Platte?
- Zur Planung des Transports soll für eine Stückzahl von 9000 das Gewicht des Verschnitts berechnet werden.
- Da der Schnittstempel im Schwerpunkt der Schnittlinien liegen muss, ist der Linienschwerpunkt rechnerisch zu bestimmen. Ein zum Schwerpunkt exzentrisch angeordneter Zapfen führt zum Verkanten des Stößels, damit zu höherem Werkzeugverschleiß und muss möglichst vermieden werden.

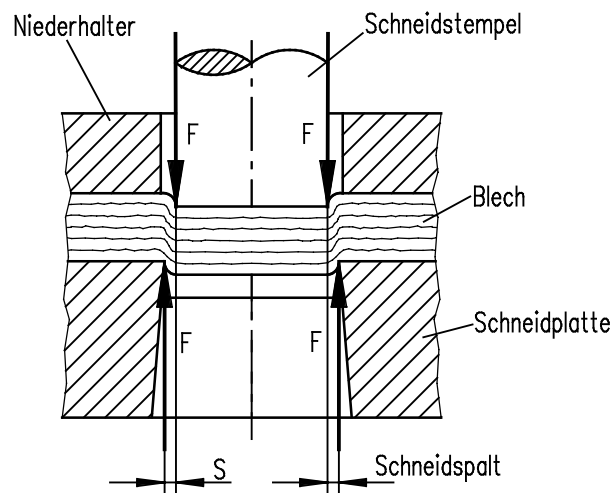


Abbildung 21 Schnittvorgang

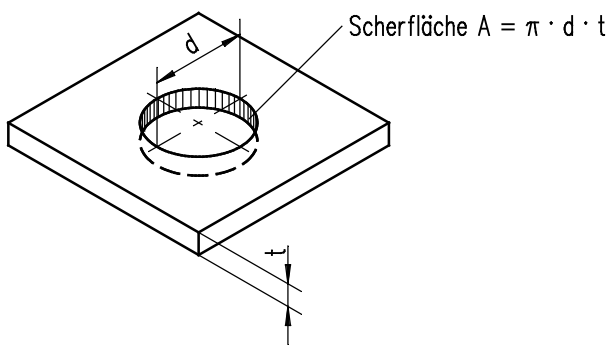


Abbildung 22 Schnitt

Es gilt auch hier die grundsätzliche Beziehung

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Belastungskennwert}}{\text{Querschnittskennwert}}$$

$$\tau_s = \frac{F}{A}$$

Durch entsprechende Umformungen der Gleichung erhält man die Ansätze für die

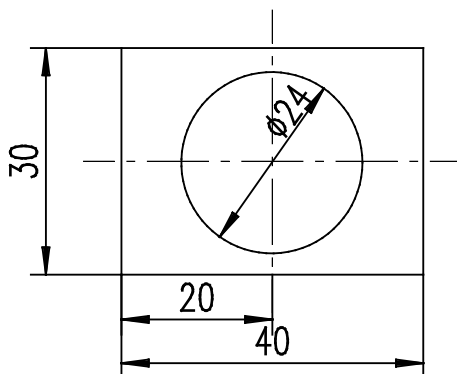
$$\text{Spannungskontrolle} \quad \tau_{svorh} = \frac{F_{vorh}}{A_{vorh}}$$

$$\text{Entwurfsrechnung} \quad A_{erf} \geq \frac{F_{vorh}}{\tau_{szul}}$$

$$\text{Belastbarkeitsrechnung} \quad F_{zul} = \tau_{szul} \cdot A_{vorh}$$

Bei Werkstoffen wie Stahl, Stahlguss, Al, Messing kann für die zulässige Spannung in der Regel  $\tau_{a\,zul} = 0,8 \cdot \sigma_{z\,zul}$  für das Scheren angenommen werden. Bei Werkstoffen wie Grauguss gilt:  $\tau_{a\,zul} = 1,2 \cdot \sigma_{z\,zul}$ . Bei Bruch gilt  $\tau_{a\,Br} = 0,8 \cdot R_m$  ( $R_m$  = Zugfestigkeit).

### Lehrbeispiel 1



Mit einem Gesamtschnittwerkzeug soll das skizzierte Blech ausgeschnitten werden.

Es stehen eine Schnittkraft von 250 kN und Bleche aus St 37 (S235JR) zur Verfügung ( $R_m = 370 \text{ Nmm}^{-2}$ ).

Welche Dicke  $t$  darf das Teil maximal haben?

### Lösung

Das Blech muss ausgeschnitten werden. Es wird abgesichert. Für die weitere Rechnung ist  $R_m = 370 \text{ Nmm}^{-2}$  maßgebend. Die Fläche für den Schneidvorgang wird durch die Blechdicke  $t$  und die gesamte Schnittlinienlänge  $l_{\text{ges}}$  bestimmt.

$$\tau_a = \frac{F}{A} \Rightarrow$$

$$A_{\text{erf}} = \frac{F_{\text{vorh}}}{\tau_{aB}} = \frac{250 \text{ kN}}{370 \text{ Nmm}^{-2} \cdot 0,8} = 845 \text{ mm}^2$$

$$A = l_{\text{ges}} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{A}{l_{\text{ges}}} = \frac{845 \text{ mm}^2}{215,4 \text{ mm}} = 3,92 \text{ mm}$$

$$l_{\text{ges}} = U = 2(30 + 40) + \pi \cdot 24 \text{ mm} = 215,4 \text{ mm}$$

Für die gegebenen Bedingungen darf das Blech nicht dicker als 3,92 mm sein.

### Berechnung der erforderlichen Schnittkraft

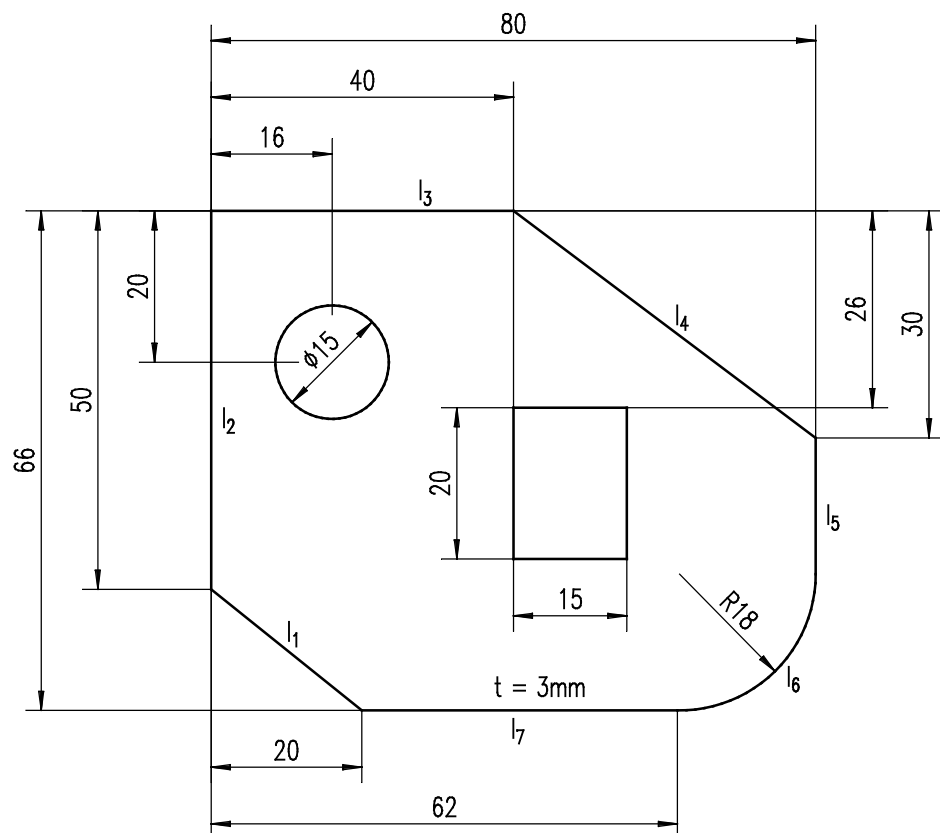


Abbildung 23 Stanzteil



Die erforderliche Schnittkraft lässt sich berechnen nach der Beziehung  
 $F_{\text{erf}} = \tau_{\text{a Br}} \cdot A_{\text{vorh}}$ .

Aus der Werkstoffangabe St 37 (S235JR) folgt  $R_m = 370 \text{ Nmm}^{-2}$ ; damit ergibt sich für  
 $\tau_{\text{a Br}} = 0,8 \cdot 370 \text{ Nmm}^{-2} = 296 \text{ Nmm}^{-2}$ .

$$A_{\text{vorh}} = U_{\text{vorh}} \cdot t$$

$$U = U_{\text{außen}} + U_{\text{Rechteck}} + U_{\text{Kreis}}$$

$$U_{\text{außen}} = \sum_{n=1}^7 l_n = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7$$

$$l_1 = \sqrt{20^2 + 16^2} \text{ mm} = 25,6 \text{ mm}$$

$$l_4 = \sqrt{40^2 + 30^2} \text{ mm} = 50 \text{ mm}$$

$$l_6 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 18 \text{ mm}}{4} = 28,3 \text{ mm}$$

$$U_{\text{außen}} = (25,6 + 50 + 40 + 50 + 18 + 28,3 + 42) \text{ mm}$$

$$U_{\text{außen}} = 253,9 \text{ mm}$$

$$U_{\text{Rechteck}} = 2(15 + 20) \text{ mm} = 70 \text{ mm}$$

$$U_{\text{Kreis}} = \pi \cdot d = \pi \cdot 15 \text{ mm} = 47,1 \text{ mm}$$

$$U = (253,9 + 70 + 47,1) \text{ mm} = 371 \text{ mm}$$

$$A_{\text{vorh}} = 371 \text{ mm} \cdot 3 \text{ mm} = 1113 \text{ mm}^2$$

$$F_{\text{erf}} = 296 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1113 \text{ mm}^2 = 329,5 \text{ kN}$$

Die Maschine kann 350 kN erzeugen. Die mögliche Schnittkraft ist damit größer als die erforderliche Schnittkraft von 329,5 kN. Das Teil kann in der Firma gefertigt werden.

### Gewichtsbestimmung für das geschnittene Werkstück

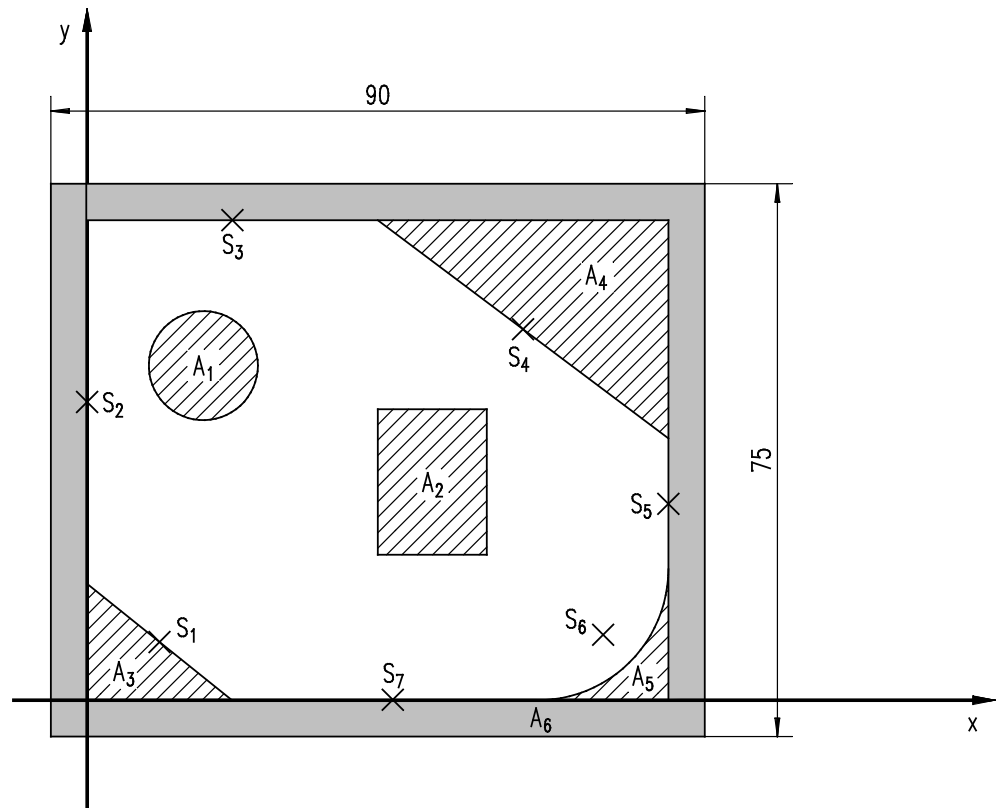


Abbildung 24 Flächenaufteilung

$$G = m \cdot g$$

$$m = V \cdot \rho$$

$$V = A \cdot t$$

$$A = A_{\text{ges}} - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6$$

$$A_{\text{ges}} = 90 \text{ mm} \cdot 75 \text{ mm} = 6750 \text{ mm}^2$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 15^2 \text{ mm}^2 = 176,7 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = a \cdot b = 15 \cdot 20 \text{ mm}^2 = 300 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = \frac{c \cdot d}{2} = \frac{20 \cdot 16}{2} \text{ mm}^2 = 160 \text{ mm}^2$$

$$A_4 = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{30 \cdot 40}{2} \text{ mm}^2 = 600 \text{ mm}^2$$

$$A_5 = 18 \cdot 18 \text{ mm}^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 36^2 = (324 - 254,5) \text{ mm}^2 = 69,5 \text{ mm}^2$$

$$A_6 = (90 \cdot (75 - 66) + 66 \cdot (90 - 80)) \text{ mm}^2 = 1470 \text{ mm}^2$$

$$A = 3974 \text{ mm}^2$$

$$V = 3974 \text{ mm}^2 \cdot 3 \text{ mm} = 11,92 \text{ cm}^3$$

$$m = 11,92 \text{ cm}^3 \cdot \frac{7,85 \text{ g}}{\text{cm}^3} = 93,57 \text{ g}$$

$$G = 93,57 \text{ g} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,918 \text{ N}$$

**Verschnitt in %**

Fläche der Grundplatte  $A_{Gr} = a \cdot b = 90 \text{ mm} \cdot 75 \text{ mm} = 6750 \text{ mm}^2$

Fläche des Werkstückes  $A = 3974 \text{ mm}^2$

$A_{Gr} : A = 100 : x$

$6750 \text{ mm}^2 : 3974 \text{ mm}^2 = 100 : x$

$x = 58,9 \%$

Es tritt ein Verschnitt von 41,1 % auf.

**Gesamtgewicht des Verschnitts bei 9000 Werkstücken**

Gewicht eines Rohlings (Platte 90 mm x 75 mm)

$G_1 = m \cdot g$

$m = V \cdot \rho = 20,25 \text{ cm}^3 \cdot 7,85 \text{ gcm}^{-3} = 159 \text{ g}$

$G_1 = 159 \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} = 1,56 \text{ N}$

Gewicht des fertigen Werkstückes  $G = 0,918 \text{ N}$

Verschnitt für eine Platte  $G_{\text{verschn}} = G_1 - G = 0,642 \text{ N}$

Gesamtverschnitt  $G_{\text{gesverschn}} = 9000 \cdot G_{\text{verschn}} = 5778 \text{ N}$

**Schwerpunktbestimmung**

Die Koordinaten des Gesamtschwerpunktes  $S_0$  von Linien können nach folgender Beziehung berechnet werden.

Linienschwerpunkt

$$x_0 = \frac{l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2 + l_3 \cdot x_3 \dots}{l_{\text{ges}}} \quad x_0 = \frac{\sum l x}{l_{\text{ges}}}$$

$$y_0 = \frac{l_1 \cdot y_1 + l_2 \cdot y_2 + l_3 \cdot y_3 \dots}{l_{\text{ges}}} \Rightarrow y_0 = \frac{\sum l y}{l_{\text{ges}}}$$

$x_0, y_0$  : Abstand zum Schneidkantenschwerpunkt in Richtung der x- bzw. y-Achse vom Bezugspunkt aus

$x_1, y_1$  : Abstand zum Linienschwerpunkt der ersten Linie vom Bezugspunkt aus

$x_2, y_2$  : Abstand zum Linienschwerpunkt der zweiten Linie vom Bezugspunkt aus

$l_1, l_2$  : Länge der ersten bzw. zweiten Linie (Teillinie)

$l_{\text{ges}}$  : Gesamtlänge des Linienzuges

Für eine gerade Strecke liegt der Schwerpunkt in der Mitte. Aufwändiger wird die Schwerpunktbestimmung z.B. für einen Kreissektor (vgl. Abbildung 25).

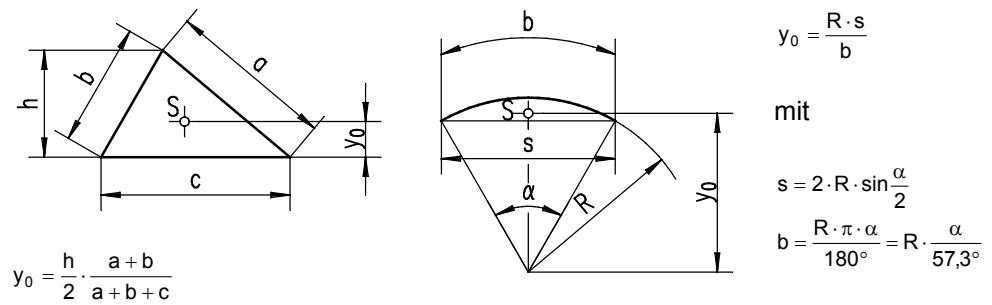


Abbildung 25 Schwerpunkte von Linien

Benötigt wird für das Werkstück der Schwerpunkt  $S_6$ , um den Gesamtschwerpunkt bestimmen zu können. In Abbildung 24 ist ein Koordinatensystem eingetragen, das als Bezugssystem dienen soll.

Folgende Vorüberlegungen sind dazu erforderlich.

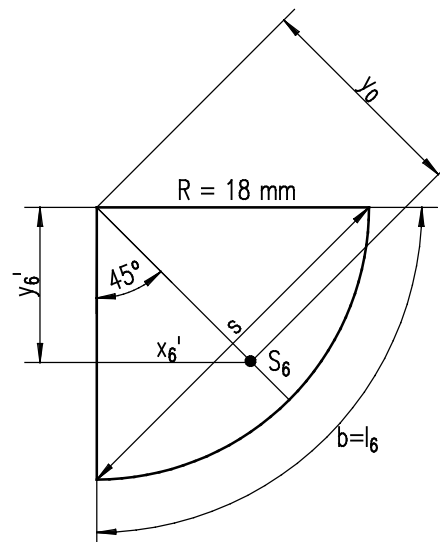


Abbildung 26 Kreisbogen

$$y_0 = \frac{R \cdot s}{b}$$

$$s = 2 \cdot R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 18 \text{ mm} \cdot \sin 45^\circ$$

$$s = 25,46 \text{ mm}$$

$$b = R \cdot \frac{\alpha}{57,3^\circ} = 18 \text{ mm} \cdot \frac{90^\circ}{57,3^\circ} = 28,27 \text{ mm}$$

$$y_0 = \frac{18 \cdot 25,46}{28,27} \text{ mm} = 16,2 \text{ mm}$$

Bestimmung von  $x'_6$  und  $y'_6$ :

$$\sin 45^\circ = \frac{x'_6}{y_0} \Rightarrow x'_6 = 16,2 \text{ mm} \cdot \sin 45^\circ$$

$$x'_6 = 11,46 \text{ mm}$$

$$x_6 = 62 \text{ mm} + 11,46 \text{ mm} = 73,46 \text{ mm}$$

$$y'_6 = x'_6, \text{ da } 45^\circ!$$

$$y_6 = 18 \text{ mm} - 11,46 \text{ mm} = 6,54 \text{ mm}$$

Damit ist der Schwerpunkt  $S_6$  bekannt: (73,46;6,54)

Nun kann der Gesamtschwerpunkt  $S_0$  bestimmt werden. Das erfolgt in Tabellenform, um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten.

$$x_0 = \frac{\sum l x}{l_{\text{ges}}} \quad y_0 = \frac{\sum l y}{l_{\text{ges}}}$$

n	$l_n$ in mm	$x_n$ in mm	$y_n$ in mm	$l_n \cdot x_n$ in mm <sup>2</sup>	$l_n \cdot y_n$ in mm <sup>2</sup>
1	25,6	10	8	256	205
2	50	0	41	0	2050
3	40	20	66	800	2640
4	50	60	51	3000	2550
5	18	80	27	1440	486
6	28,3	73,46	6,54	2079	185
7	42	41	0	1722	0
	$\Sigma = 253,9$			$\Sigma = 9297$	$\Sigma = 8116$

$$x_0 = \frac{\sum l x}{l_{\text{ges}}} = \frac{9297 \text{ mm}^2}{253,9 \text{ mm}} = 36,6 \text{ mm} \quad y_0 = \frac{\sum l y}{l_{\text{ges}}} = \frac{8116 \text{ mm}^2}{253,9 \text{ mm}} = 32,0 \text{ mm}$$

Der Stempelschwerpunkt muss mit dem Gesamtlinienschwerpunkt  $S_0$  (36,6;32,0) zusammenfallen.

## Zu 2. Tiefziehen

In der Fertigungstechnik werden häufig Bleche zu Karosserieteilen für Kraftfahrzeuge, zu Abdeckungen oder zu Gefäßen umgeformt. Das erfolgt häufig durch Tiefziehen.

**Tiefziehen** ist ein Fertigungsverfahren, bei dem ein zugeschnittenes Blech unter Einwirkungen von Zug und Druck in einen offenen Hohlkörper umgeformt wird, ohne dass sich die Blechdicke wesentlich ändert.

Bei kastenförmigen Tiefziehteilen oder anderen Formen, die in der Industrie häufig zu finden sind, werden meist durch Versuche die Voraussetzungen für die industrielle Fertigung bestimmt.

Die folgenden Erörterungen beziehen sich nur auf das Tiefziehen mit starren Werkzeugen. Außerdem wird der einfachste Fall - das Ziehen rotationssymmetrischer

Hohlkörper, z.B. einfacher zylindrischer Napf - betrachtet, weil die rechnerische Erfassung noch verständlich ist.

Als Ausgangsstoff für die Fertigung werden zugeschnittene Bleche (Ronden) verwendet. Die gewünschte Größe des Gefäßes, das hergestellt werden soll, bestimmt den Durchmesser der Ronde.

In der Praxis gibt es die verschiedensten Formen, die tiefgezogen werden. Für die Ermittlung des Rondendurchmessers rotationssymmetrischer Teile sind in der folgenden Übersicht einige Beispiele angegeben.

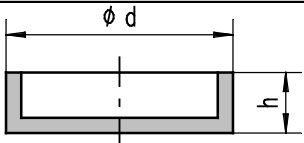
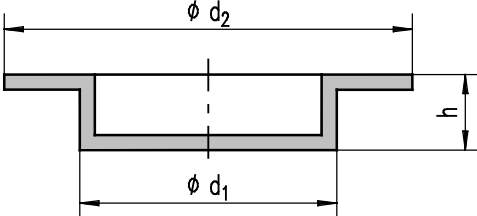
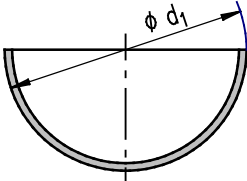
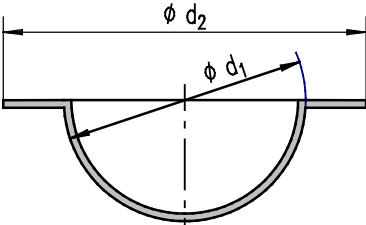
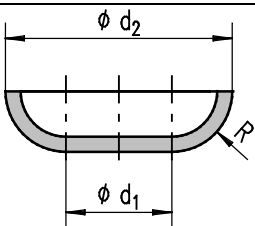
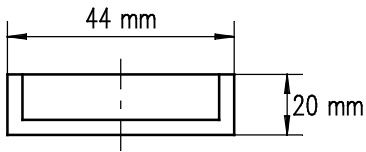
Gefäßform	Durchmesser des Zuschnitts
	$D = \sqrt{d^2 + 4 \cdot d \cdot h}$
	$D = \sqrt{d_2^2 + 4 \cdot d_1 \cdot h}$
	$D = \sqrt{2d^2} = 1,41d$
	$D = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$
	$D = \sqrt{d_1^2 + 2\pi R d_1 + 8R^2}$

Tabelle 1 Berechnung der Rondendurchmesser

Lehrbeispiel 2

Berechnen Sie für das dargestellte Gefäß aus X5 CrNi 18 10 und einer Wandstärke von 2 mm die erforderliche Ronde für den Tiefziehvorgang!

Ermitteln Sie außerdem, wie viel Milliliter Wasser das Gefäß nach dem Tiefziehen aufnehmen kann!

**Lösung****Rondendurchmesser**

Der Tabelle können die entsprechende Formel und der Abbildung die erforderlichen Maße entnommen werden.

$$D = \sqrt{d^2 + 4dh} = \sqrt{44 \text{ mm}^2 + 4 \cdot 44 \text{ mm} \cdot 20 \text{ mm}} = 73,86 \text{ mm}$$

Zuschnitt der Ronde wird auf 74 mm aufgerundet.

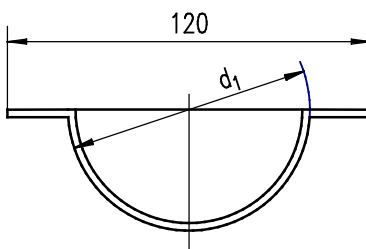
**Volumenbestimmung**

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 \cdot h_1$$

$$d_1 = 44 \text{ mm} - 2 \cdot 2 \text{ mm} = 40 \text{ mm}$$

$$h_1 = 20 \text{ mm} - 2 \text{ mm} = 18 \text{ mm}$$

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot (40 \text{ mm})^2 \cdot 18 \text{ mm} = 22,619 \text{ cm}^3 = 22,6 \text{ ml}$$

Lehrbeispiel 3

Das skizzierte Gefäß, das tiefgezogen werden soll, ist für ¼ Liter Wasser vorgesehen. Das Blech hat eine Dicke von 2 mm.

Berechnen Sie den erforderlichen Durchmesser der Ronde!

**Lösung**

Folgende Arbeitsschritte sind erforderlich:

- Bestimmung des erforderlichen Innendurchmessers für das Gefäß aus dem gegebenen Volumen
- Berechnung des Rondendurchmessers

### Durchmesserbestimmung

Volumenformel für die Halbkugel:  $V = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 250 \text{ cm}^3}{2\pi}} = 4,92 \text{ cm} \quad \Rightarrow d = 9,84 \text{ cm} = 98,4 \text{ mm}$$

gewählt: Stempeldurchmesser  $d_{\text{St}} = 100 \text{ mm}$

### Rondendurchmesser D

$$D = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

$$d_1 = d_{\text{St}} + 2 \cdot 2 \text{ mm}$$

$$D = \sqrt{104^2 \text{ mm}^2 + 120^2 \text{ mm}^2} = 158,8 \text{ mm}$$

gewählt :  $D = 160 \text{ mm}$

### Zu 3. Leistungsberechnung bei Zerspanungsvorgängen

Bei der Zerspanung von Werkstücken ist die erforderliche Motorleistung vom Zerspanungsvorgang abhängig. Für eine Firma kann es bei der Übernahme eines Auftrages von Bedeutung sein, welche Motorleistung zum Zerspanen erforderlich ist. Deshalb kann es sinnvoll sein, die erforderliche Leistung des Motors, die von der Schnittleistung  $P_C$  abhängig ist, zu berechnen.

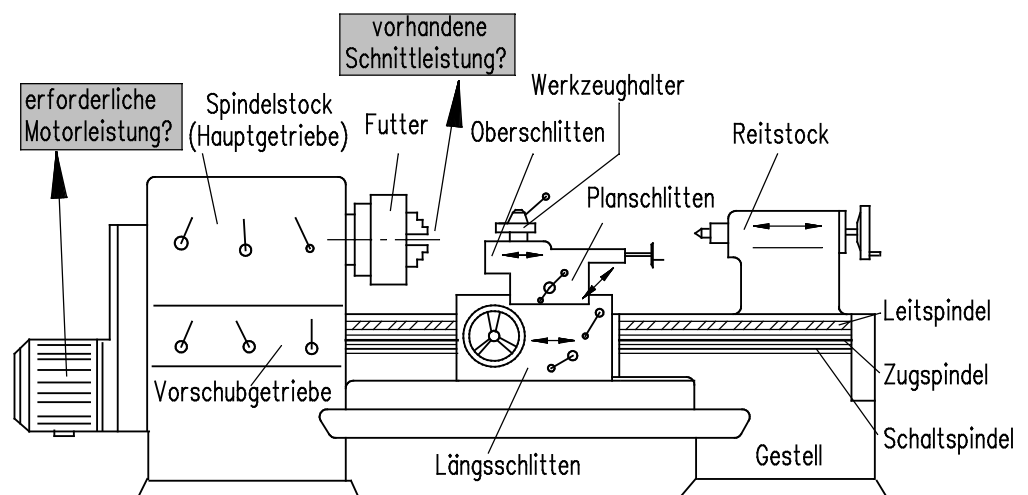


Abbildung 27 Drehmaschine



Folgende Überlegungen sind dazu erforderlich:

Die Leistung des Antriebes der Werkzeugmaschine muss um die Verluste innerhalb des Kraftflusses größer sein als die Schnittleistung.

$$P_{\text{an}} = \frac{P_{\text{c}}}{\eta_{\text{ges}}}$$

Wie aus den physikalischen Grundlagen der Leistungsermittlung bekannt ist, kann durch Multiplikation der beiden vektoriellen Größen Schnittkraft und Schnittgeschwindigkeit (hier: die vorhandene Schnittgeschwindigkeit!) die Schnittleistung gewonnen werden:

$$P_{\text{c}} = F_{\text{c}} \cdot v_{\text{c vorh}}$$

Beim Einsetzen der entsprechenden Werte ist auf die Einheiten zu achten!

Die Vorschubleistung ist im Vergleich zur Schnittleistung so gering, dass sie in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden kann.

Richtwerte für optimale Schnittgeschwindigkeiten beim Drehen in Abhängigkeit vom

- zu bearbeitenden Werkstoff,
- dem Schneidstoff des Werkzeuges und des Vorschubes

sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen.

Werkstoff	Zug- festigkeit (N/mm <sup>2</sup> )	Schneid- werkzeug	Schnittgeschwindigkeit $v_c$ (m/min) bei Vorschub $f$ (mm) und Einstellwinkel $\kappa$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
			$f = 0,063$				$f = 0,1$				$f = 0,16$				$f = 0,25$				$f = 0,4$				$f = 0,63$				$f = 1$				$f = 1,6$				$f = 2,5$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
			45°	60°	90°	45°	60°	90°	45°	60°	90°	45°	60°	90°	45°	60°	90°	45°	60°	90°	45°	60°	90°	45°	60°	90°	45°	60°	90°	45°	60°	90°																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
S235JR C 22 (St 37)	bis 500	SS				50	40	31,5	45	35,5	28	35,5	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	22,4	18	22,4	28	2

Tabelle 2 Richtwerte für die Schnittgeschwindigkeit beim Drehen

Die eingetragenen Werte gelten für Schnitttiefe  $a_p$  bis 2,24 mm. Über 2,25 bis 7,1 mm sind die Werte um angenähert 20 % und über 7,1 bis 22,4 mm um angenähert 40 % zu kürzen.  
Die Werte  $v_c$  müssen beim Abdrehen einer Kruste, Gusshaut oder bei Sandeinschlüssen um 30 bis 50 % verringert werden.  
Standzeit  $T_2$  für Hartmetall = 240 min; für Schnellstahl SS = 60 min.

Die Schnittkraft  $F_C$  wird über die Beziehung  $F_C = A \cdot k_C \cdot K_{ges}$  bestimmt.

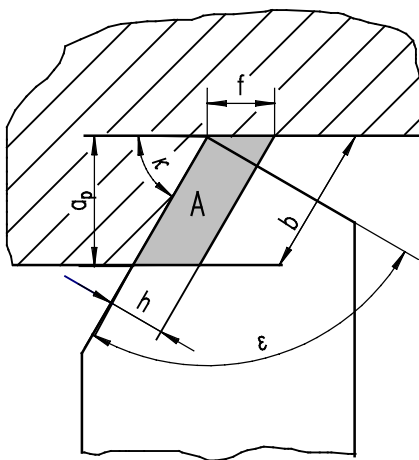
Der Korrekturfaktor  $K_{ges}$  ist u.a. abhängig von folgenden Größen: Spanwinkel, Schnittgeschwindigkeit, Schneidstoff, Verschleiß des Werkzeuges und Spanstauchung.

Durch die Multiplikation entsprechender Faktoren wird  $K_{ges}$  berechnet.

$$K_{ges} = K_\gamma \cdot K_{vc} \cdot K_{sch} \cdot K_{ver} \cdot K_{St}$$

Hier wird zur Vereinfachung angenommen, dass  $K_{ges}$  bereits bekannt ist.

Der **Spanungsquerschnitt A** beim **Längsdrehen** zeigt das folgende Bild:



In diesem Bild bedeuten:

- $\kappa$  : Einstellwinkel des Werkzeuges
- $a_p$  : Schnitttiefe
- $f$  : Vorschub pro Umdrehung
- $b$  : Spanungsbreite
- $h$  : Spanungsdicke

Abbildung 28 Spanungsquerschnitt beim Längsdrehen

Wie aus der Abbildung ersichtlich, bildet der Spanungsquerschnitt A ein Parallelogramm, dessen Fläche wie folgt berechnet werden kann:

$$A = a_p \cdot f = b \cdot h$$

Für die Spanungsdicke  $h$  und die Spanungsbreite  $b$  ergeben sich für das einschneidige Werkzeug folgende Zusammenhänge:

$$h = f \cdot \sin \kappa \quad b = \frac{a_p}{\sin \kappa}$$

Sehr wichtig ist noch der Zusammenhang zwischen der Schnitttiefe  $a_p$  und den Durchmessern:  $D$  (Werkstückdurchmesser vor der Bearbeitung) und  $d$  (Werkstückdurchmesser nach der Bearbeitung)

$$D = d + 2a_p$$

Mithilfe dieser Gleichung kann zukünftig z.B. eine größtmögliche Schnitttiefe  $a_p$  berechnet werden, die mit einer Maschine bekannter Leistung möglich ist.

Die spezifische Schnittkraft  $k_c$  ist eine Größe, die zum einen vom Material, das zerspannt werden soll und zum anderen von der Spanungsdicke  $h$  abhängt. Die mathematische Verknüpfung ist mit folgender Beziehung gegeben:

$$k_c = \frac{k_{c1.1}}{h^{m_c}}$$

Hierin bedeuten:

- $k_{c1.1}$  : Hauptwert der spezifischen Schnittkraft in  $\text{N/mm}^2$ ;  $k_{c1.1}$  gibt den Wert einer Zerspanungskraft an, die erforderlich ist, um einen Span der Dicke  $h = 1\text{mm}$  und der Spannungsbreite  $b = 1\text{mm}$  abzuschneiden.  
 $h$  : Spannungsdicke in mm  
 $m_c$  : Exponent (Steigungsfaktor einer Schnittkraftgeraden); wurde ebenfalls im Versuch bestimmt!

Der im Nenner auftretende Faktor  $h^{m_c}$  muss in dieser Gleichung ohne Einheit eingesetzt werden, da sich für  $k_c$  als Einheit  $\text{N/mm}^2$  ergeben muss.

Die entsprechenden Werte für  $k_{c1.1}$  und  $m_c$  liegen in Tabellen vor.

Werkstoff	$k_{c1.1}$ in $\text{N/mm}^2$	$m_c$
St 42 (S275)	1800	0,17
St 50 (E295)	1990	0,26
St 60 (E335)	2110	0,17
St 70 (E360)	2260	0,30
C 45 Ck 45 (C45E)	2220	0,14
C 60 Ck 60 (C60E)	2130	0,18
16 Mn Cr 5	2100	0,26
18 Cr Ni 6	2260	0,30
34 Cr Mo 4	2240	0,21
42 Cr Mo 4	2500	0,26
50 Cr V 4	2220	0,26
Nichtrostender Stahl	2580	0,18
Mn-Hartstahl	3360	0,22
Hartguss	2060	0,19
GS-45	1600	0,17
GS-52	1800	0,17
GG-14	950	0,21
GG-26	1160	0,26
GTW, GTS (EN-GJMW, EN-GJMB)	1200	0,24
Gussbronze	1800	0,17
Rotguss	650	0,25
Messing	780	0,18
Al-Guss	650	0,25
Mg-Legierung	280	0,19

Tabelle 3 Richtwerte für  $k_{c1.1}$  und  $m_c$

Lehrbeispiel 4

Eine Welle aus 18CrNi6 soll in einem Schnitt von 86 mm Durchmesser auf 82 mm Durchmesser abgedreht werden. Der Einstellwinkel  $\kappa$  beträgt  $60^\circ$  und der Vorschub ist auf 0,4 mm/Umdrehung eingestellt. Der Korrekturfaktor  $K_{\text{ges}}$  sei 1,0.

*Ermitteln Sie die bei dieser Dreharbeit auftretende Schnittkraft  $F_c$ !*

**Lösung**

Aus der Tabelle 3 ergibt sich für den Stahl 18CrNi6:

$$k_{c_{1,1}} = 2260 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} ; \quad m_c = 0,30$$

$$F_c = A \cdot k_c \cdot K_{\text{ges}}$$

$$A = a_p \cdot f$$

$$a_p = ?$$

$$D = d + 2 \cdot a_p$$

$$a_p = \frac{D - d}{2} = \frac{86 - 82}{2} = 2 \text{ mm}$$

Damit ergibt sich A:

$$A = 2 \text{ mm} \cdot 0,4 \text{ mm} = 0,8 \text{ mm}^2$$

$$k_c = \frac{k_{c_{1,1}}}{h^{m_c}} ; \quad h = f \cdot \sin \kappa$$

$$h = 0,4 \text{ mm} \cdot \sin 60^\circ$$

$$h = 0,3464 \text{ mm}$$

$$k_c = \frac{2260}{(0,3464)^{0,3}} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 3106,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$F_c = 0,8 \text{ mm}^2 \cdot 3106,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1,0$$

$$\underline{\underline{F_c = 2484,97 \text{ N}}}$$

Für diesen Schnitt sind 2485 N als Schnittkraft notwendig!

Lehrbeispiel 5

Im Lehrbeispiel 4 ergab sich beim Zerspanen des Werkstoffes 18 CrNi 6 eine Schnittkraft von  $F_c \approx 2485 \text{ N}$ .

*Welche Schnittleistung ist erforderlich, wenn eine Schnittgeschwindigkeit von 75 m/min vorliegt?*

### Lösung

$$P_c = F_v \cdot v_c = \frac{2485 \text{ N} \cdot 75 \text{ m}}{60 \frac{\text{s}}{\text{min}} \cdot \text{min}} = 3106,25 \text{ Watt}$$

Die Leistung des Antriebes der Werkzeugmaschine muss um die Verluste innerhalb des Kraftflusses größer sein als die Schnittleistung.

$$\text{Also gilt : } P_{\text{an}} = \frac{P_c}{\eta_{\text{ges}}}$$

Wird angenommen, dass  $\eta_{\text{ges}} = 0,8$  beträgt, dann ergibt sich eine erforderliche Motorleistung von  $P_{\text{an}} = P_{\text{mot}} = 3,88 \text{ kW}$ .

Bezüglich der zu wählenden Schnittgeschwindigkeiten ist darauf zu achten, dass Drehmaschinen in der Regel mit einem Getriebe ausgestattet sind, das nicht jede Drehzahlstellung ermöglicht.

Nach **DIN 804** gelten folgende (Standard) **Lastdrehzahlen für Werkzeugmaschinen** (das ist eine geometrische Reihe; der Quotient zweier aufeinander folgender Drehzahlen ist konstant!) in 1/min:

112    140    180    224    280    355    450    560    710    900    1120

Diese Drehzahlreihe kann durch den Faktor 10 erweitert oder auch dividiert werden.

Möglich sind also auch Drehzahlen wie:

90 1/min oder 1400 1/min!

Der Zusammenhang zwischen Drehzahl und Schnittgeschwindigkeit stellt sich folgendermaßen dar:

$$v_c = D \cdot \pi \cdot n$$

Diese Beziehung wird häufig als „zugeschnittene Größengleichung“ oder „Zahlenwertgleichung“ verwendet.

### Lehrbeispiel 6

Eine Welle aus CrMo-Stahl mit  $R_m = 900 \text{ N/mm}^2$  soll auf einer Drehmaschine überdreht werden. Der Außendurchmesser beträgt 75 mm, der neue Durchmesser soll 74 mm betragen.

Folgende weitere Angaben sind bekannt:

Schneidstoff	Hartmetall P 10
Vorschub	$f = 0,63 \text{ mm}$
Einstellwinkel	$\kappa = 60^\circ$
Schnittkraft	$F_c = 3000 \text{ N}$
Gesamtwirkungsgrad	$\eta_{\text{ges}} = 0,75$

*Ermitteln Sie die vorhandene Schnittgeschwindigkeit  $v_{c \text{ vorh}}$  und die Antriebsleistung!*

**Lösung**

Aus der Tabelle 2 „Richtwerte für die Schnittgeschwindigkeit beim Drehen“ ergibt sich folgende Geschwindigkeit:

$$v_{cTab} = 60 \frac{\text{m}}{\text{min}} \quad (\text{für Cr Mo St / Hartmetall } P_{10} / \kappa = 60^\circ \text{ und } f = 0,63)$$

Da  $D = 75 \text{ mm}$  folgt:

$$v_{cTab} = \frac{D \cdot \pi \cdot n}{1000}$$

$$n_{Ri} = \frac{v_{cTab} \cdot 1000}{D \cdot \pi} = \frac{60000}{75 \cdot \pi} = 254,6 \frac{1}{\text{min}}$$

Das ist ein Richtwert. Aus der Drehzahltable werden  $224 \text{ min}^{-1}$  gewählt. Würde der größere Wert, also  $280 \text{ min}^{-1}$  genommen, dann wäre die geforderte Haltbarkeit des Werkzeuges wegen schnellerer Abnutzung nicht mehr einzuhalten.

Mit  $n_{gew} = 224 \frac{1}{\text{min}}$  errechnet sich nun  $v_{c \text{ vorh}}$ :

$$v_{c \text{ vorh}} = \frac{D \cdot \pi \cdot n}{1000} = \frac{75 \cdot \pi \cdot 224}{1000} = 52,78 \frac{\text{m}}{\text{min}} \approx 53 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

Damit ergibt sich die Schnittleistung  $P_c$ :

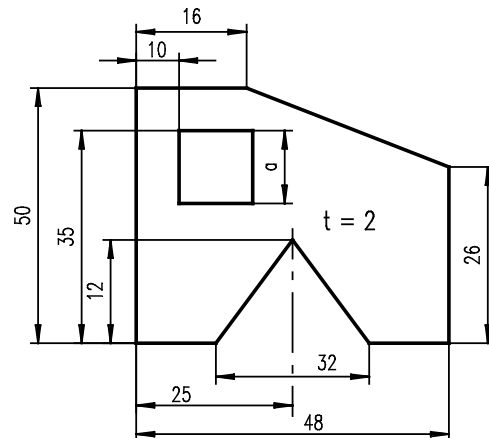
$$P_c = F_c \cdot v_{c \text{ vorh}} = 3000 \text{ N} \cdot 53 \frac{\text{m}}{\text{min}} \cdot \frac{1}{60 \frac{\text{s}}{\text{min}}}$$

$$P_c = 2650 \text{ W}$$

$$P_{Antr} = \frac{P_c}{\eta} = \frac{2650 \text{ W}}{0,75} = 3533 \text{ W} \hat{=} 3,53 \text{ kW}$$

**Aufgaben**

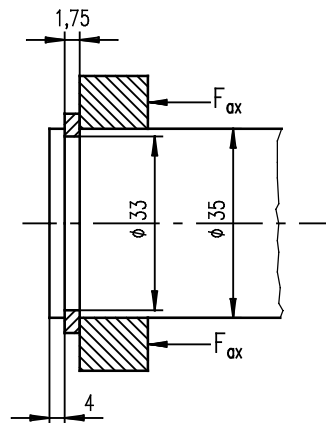
Aufgabe 1



Mit einem Gesamtschnittwerkzeug soll das skizzierte Werkstück von 2 mm Blechdicke mit einem quadratischen Durchbruch hergestellt werden.

Welche Kantenlänge  $a$  kann maximal gewählt werden, wenn eine Schnittkraft von 200 kN und Blech aus St 50 (E295) zur Verfügung steht?

Aufgabe 2

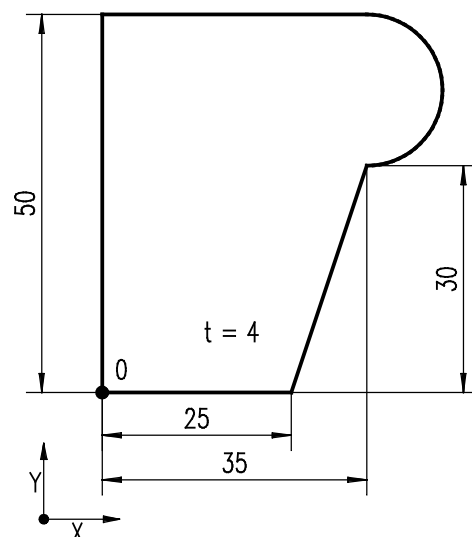


Die Verwendung von Sicherungsringen nach DIN 471 - 40 x 1,75 (Werkstoff Federstahl C 67;  $\tau_{a, zul} = 300 \text{ Nmm}^{-2}$ ) zur Aufnahme von axialen Kräften (am Umfang gleichmäßig verteilt) verursacht geringe Fertigungskosten im Vergleich zu anderen Verbindungen. Die Haltbarkeit eines Sicherungsringes für Wellen (St 50 (E295) für Lastfall II) soll untersucht werden.

Mit welcher Axialkraft darf der Sicherungsring belastet werden?

**Hinweis:** Die Welle ist gesondert an anderer Stelle zu prüfen.

Aufgabe 3



Das skizzierte Werkstück aus St 50 (E295) (Materialdicke 4 mm) soll ausgeschnitten werden.

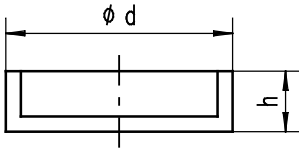
3.1 Welche Schnittkraft ist dazu mindestens erforderlich (Scherfestigkeit  $\tau_{St50} = 400 \text{ N/mm}^2$ )?

3.2 Wo liegt der Linienschwerpunkt?



Aufgabe 4

In das skizzierte Gefäß (vgl. folgende Abbildung) sollen 0,5 Liter Wasser passen. Die Höhe verhält sich zum Durchmesser wie 1:2. Runden Sie bei der Berechnung von  $d$  und  $D$  auf ganze Zehner (in mm!) auf.



- 4.1 Berechnen Sie den erforderlichen Rondendurchmesser für das Tiefziehen des skizzierten zylindrischen Gefäßes (vgl. Abbildung) aus einem Blech U St13 (DC03) mit 2 mm Dicke!
- 4.2 Wie viel Wasser geht auf Grund der Vorgaben nach dem Ziehen tatsächlich in das Gefäß?

Aufgabe 5

Ein halbkugelförmiges Gefäß aus Aluminium ( $\rho = 2,7 \text{ kg/dm}^3$ ) mit einer lichten Weite von 30 mm und einer Wandstärke von 3 mm soll gezogen werden.

Berechnen Sie den erforderlichen Durchmesser und die Masse der Ronde!

Aufgabe 6

Ein Werkstück mit einem Durchmesser von  $D = 100 \text{ mm}$  aus Hartguss wird mit einem Schneidwerkzeug K10 überdreht. Einstellbare Drehzahlen an der Maschine sind:

$$n_1 = 35,5 \text{ min}^{-1} ; \quad n_2 = 56 \text{ min}^{-1} ; \quad n_3 = 70 \text{ min}^{-1} ; \quad n_4 = 95 \text{ min}^{-1}$$

Weitere gegebene Werte :

Schnitttiefe	$a_p = 2,0 \text{ mm}$
Vorschub pro Umdrehung	$f = 0,10 \text{ mm}$
Einstellwinkel	$\kappa = 60^\circ$

Bestimmen Sie

- 6.1 die Drehzahl!
- 6.2 den Spanungsquerschnitt!
- 6.3 die Schnittkraft bei  $K_{ges} = 1,56$ !
- 6.4 die Schnittleistung!

### Aufgabe 7

Eine Welle aus St 60 (E335) mit einem Durchmesser von 90 mm wird mit Hartmetall in einem Schnitt bei einem Einstellwinkel von  $60^\circ$  überdreht. Der Vorschub wurde bei einer Schnitttiefe von 3,2 mm mit 0,25 mm festgelegt.

Es stehen drei Drehmaschinen zur Verfügung:

- Maschine A mit 4 kW Antriebsleistung
- Maschine B mit 8 kW Antriebsleistung
- Maschine C mit 12 kW Antriebsleistung

Die Antriebsmotoren weisen einen Wirkungsgrad von 86 %, die Maschinen einen Wirkungsgrad von 80 % auf.

*Ermitteln Sie die*

*7.1 einzustellende Drehzahl!*

*7.2 Schnittkraft, wenn  $K_{ges} = 1,3$  ist!*

*7.3 Schnittleistung!*

*7.4 zu verwendende Maschine!*

### Aufgabe 8

Eine Welle aus Ck 60 (C60E) von 50 mm Durchmesser soll mit Hartmetall P20 bei einem Vorschub von 0,4 mm und einer eingestellten Schnittgeschwindigkeit von 100 m/min für eine vorgegebene Standzeit bei  $\kappa = 45^\circ$  überdreht werden. Die Maschine wird von einem Motor mit 6,3 kW angetrieben.

*Auf welchen Durchmesser könnte die Welle in einem Schnitt abgedreht werden, wenn der Wirkungsgrad 0,82 beträgt und  $K_{ges} = 1,42$  angenommen wird?*

### Aufgabe 9

Eine Welle aus C60 soll von 80 mm auf 72 mm in einem Schnitt abgedreht werden. Als Werkzeug wird P10 bei  $\kappa = 60^\circ$  und einem Vorschub von 0,4 mm verwendet. Für  $K_{ges}$  wird 1,3 angenommen. Der Wirkungsgrad des Motors liegt bei 85 %, für die Drehmaschine bei 78 %.

*Welche Leistung nimmt der Elektromotor der Drehmaschine bei dieser Dreharbeit auf?*

### Aufgabe 10

Eine Drehmaschine wird von einem 6 kW-Motor mit einem Gesamtwirkungsgrad von  $\eta = 0,75$  angetrieben. Der Einstellwinkel sei  $\kappa = 60^\circ$ , die Drehmaschine verfügt über Drehzahlen gemäß DIN 804. Als Schneidstoff wird P 10 (Hartmetall) eingesetzt. Zerspant werden soll St 70 (E360).

Folgende weitere Größen sind gegeben:

- $K_{\text{ges}} = 1,38$
- $D = 76 \text{ mm}$  Außendurchmesser
- $f = 0,4 \text{ mm}$  Vorschub

*10.1 Ermitteln Sie die vorhandene Schnittgeschwindigkeit!*

*10.2 Auf welchen Durchmesser könnte eine Welle aus St 70 (E360) von 76 mm Durchmesser **in einem Schnitt** abgedreht werden?*

### Aufgabe 11

Eine kleine Drehmaschine wird von einem 1,2 kW-Motor angetrieben. Die Drehmaschine ist für maximal 30 mm Werkstückdurchmesser bei einer Zustellung von  $a_p = 3 \text{ mm}$  vorgesehen.

Weitere bekannte Werte:

- Werkzeug HSS
- Einstellwinkel  $\kappa = 60^\circ$
- Gesamtwirkungsgrad  $\eta_{\text{ges}} = 0,8$
- Korrekturwert  $k_{\text{ges}} = 1,0$

*Mit welchem Vorschub dürfte im Extremfall gearbeitet werden, wenn Gussbronze mit  $k_{C\ 1,1} = 1800 \text{ Nmm}^{-2}$  und  $m_C = 0,17$  für die Bearbeitung bei einer eingestellten Schnittgeschwindigkeit von  $v_{C\ \text{vorh}} = 50 \text{ m/min}$  vorgesehen ist?*

**Lösungen**

**Lösungsanhang**

1 Problemstellungen aus dem Bereich der Schwingungs- und Wellenlehre

**Aufgabe 1**

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} - \arcsin\left(\frac{y}{\hat{y}}\right)}$$

**Aufgabe 2.1**

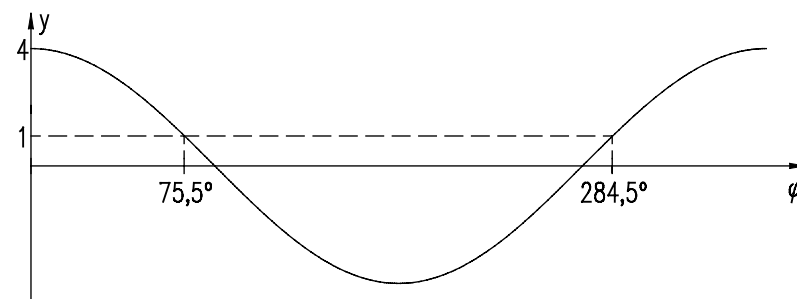
$$f = \frac{1}{T} = 0,5 \frac{1}{s} = 0,5 \text{ Hz}$$

**Aufgabe 2.2**

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} = 3,14 \frac{1}{s}$$

**Aufgabe 2.3**

$$\varphi_{(0)} = \arccos\left(\frac{y}{\hat{y}}\right) = 1,318 \text{ rad} = 75,5^\circ \text{ oder } \varphi = 360^\circ - 75,5^\circ = 284,5^\circ$$



Da Maximum später folgt, ist  $\varphi = 284,5^\circ$ .

**Aufgabe 2.4**

$$y_{(t)} = \hat{y} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$y_{(t)} = 4 \text{ cm} \cdot \cos\left(3,14 \frac{1}{s} \cdot t - 1,318\right)$$

**Aufgabe 2.5**

$$y_{(t=25 \text{ s})} = -1 \text{ cm}$$

**Aufgabe 3.1**

$$T = 1,405 \text{ s}$$

**Aufgabe 3.2**

$$\omega = 4,472 \frac{1}{\text{s}}$$

**Aufgabe 3.3**

$$\hat{y} = \frac{m_2 \cdot g}{c} = 0,5 \text{ m}$$

**Aufgabe 3.4**

$$\varphi_0 = 0$$

$$v_1 = -2,236 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Aufgabe 3.5**

$$a_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_2 = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

**Aufgabe 4.1**

$$h = 725 \text{ m}$$

**Aufgabe 4.2**

$$\lambda = 2,9 \text{ m}$$

**2 Problemstellungen aus dem Bereich der Optik****Aufgabe 1**

$$b = \frac{g \cdot f}{g - f}$$

**Aufgabe 2**

$$\delta = 2 \cdot \gamma = 180^\circ$$

Die Lichtstrahlen schneiden sich nicht, sondern laufen parallel zueinander.

**Aufgabe 3.1**

$$\Delta s = 9,74 \text{ cm}$$

**Aufgabe 3.2**

$$\beta_2 = 40^\circ$$

**Aufgabe 4.1**

$$f = \frac{g \cdot b}{g + b}$$

$$g = s - b$$

$$f = \frac{b \cdot s - b^2}{s} = b - \frac{1}{s} \cdot b^2$$

**Aufgabe 4.2**

$$0 = b^2 - sb + sf$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$g_1 = 50,8 \text{ cm}; b_1 = 189,2 \text{ cm}$$

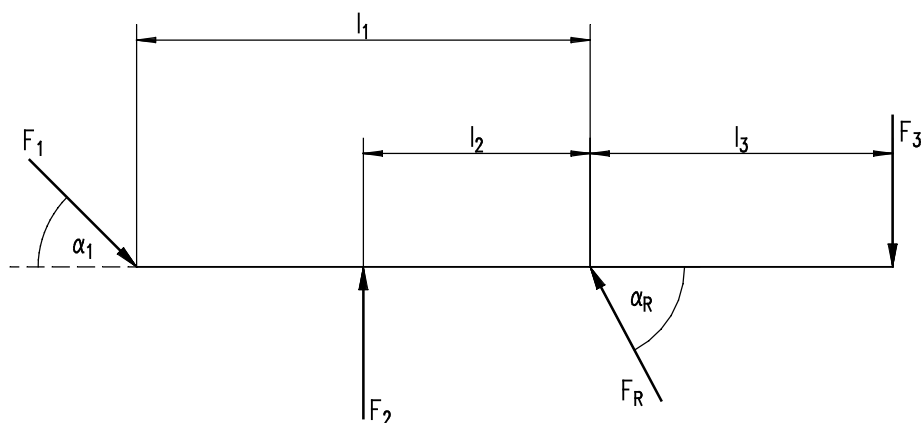
$$g_2 = 189,2 \text{ cm}; b_2 = 50,8 \text{ cm}$$

## 3 Problemstellungen aus dem Bereich der Mechanik

**Aufgabe 1**

$$F_R = 603,2 \text{ N}$$

$$\alpha_R = 62^\circ$$

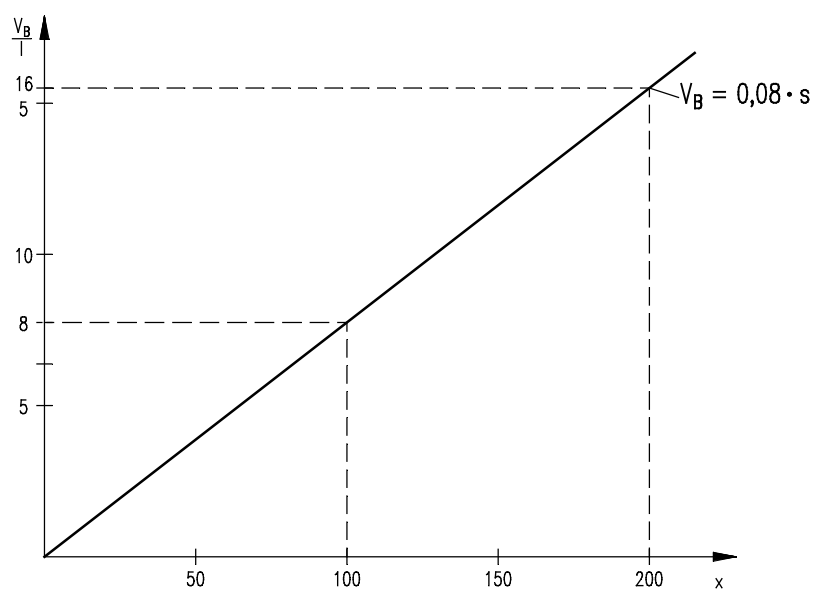
**Aufgabe 2.1**

$$V_B = f(s) = \frac{8 \text{ l}}{100 \text{ km}} \cdot s = 0,08 \frac{\text{l}}{\text{km}} \cdot s$$

**Aufgabe 2.2**

$$V_B = 45 \text{ l}$$

$$\Rightarrow s = 562,5 \text{ km}$$

**Aufgabe 2.3**

### Aufgabe 3.1

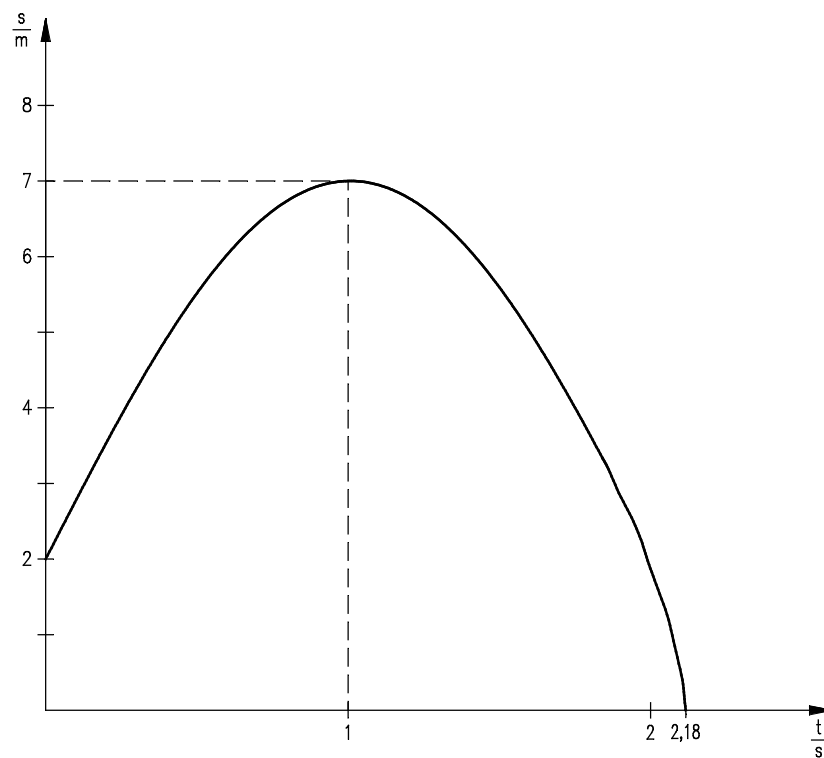
$$s = f(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

### Aufgabe 3.2

$$s_{\max} = 7 \text{ m}; t_{\max} = 1 \text{ s}$$

$$t_{\text{Flug}} = 2,18 \text{ s}$$

### Aufgabe 3.3



### Aufgabe 4.1

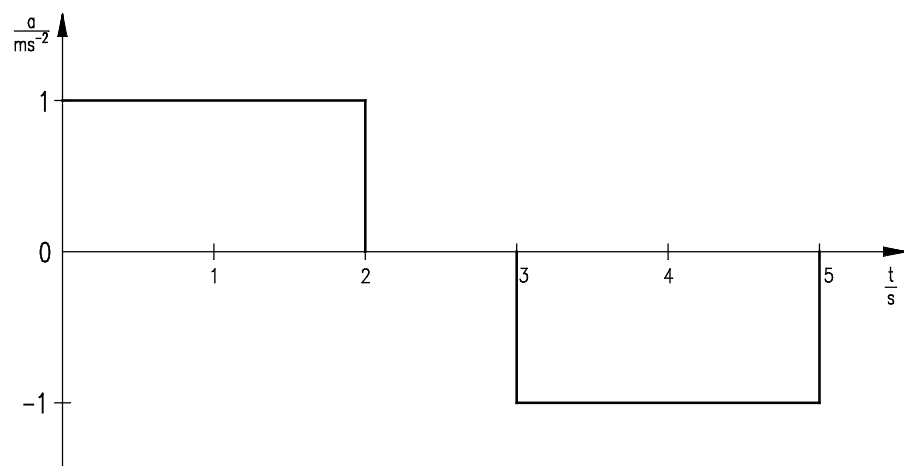
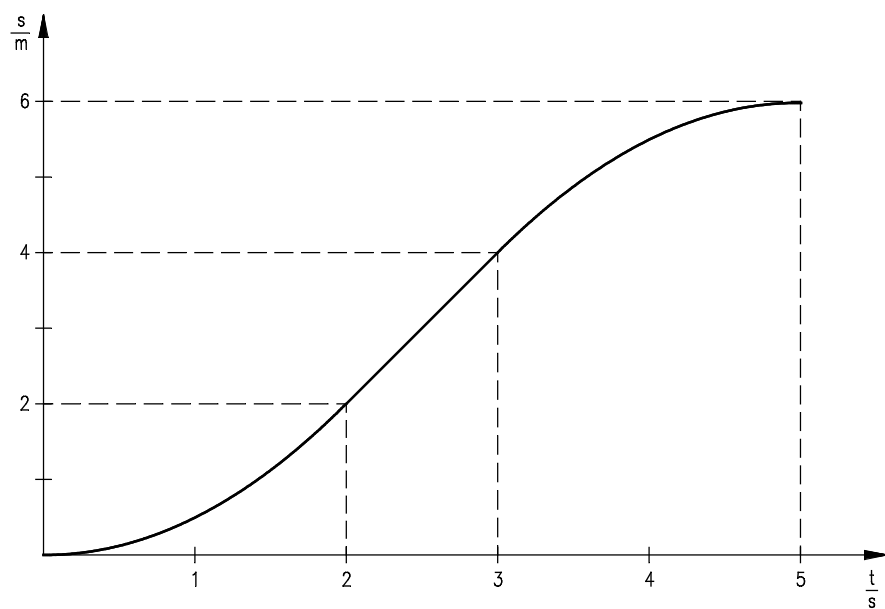
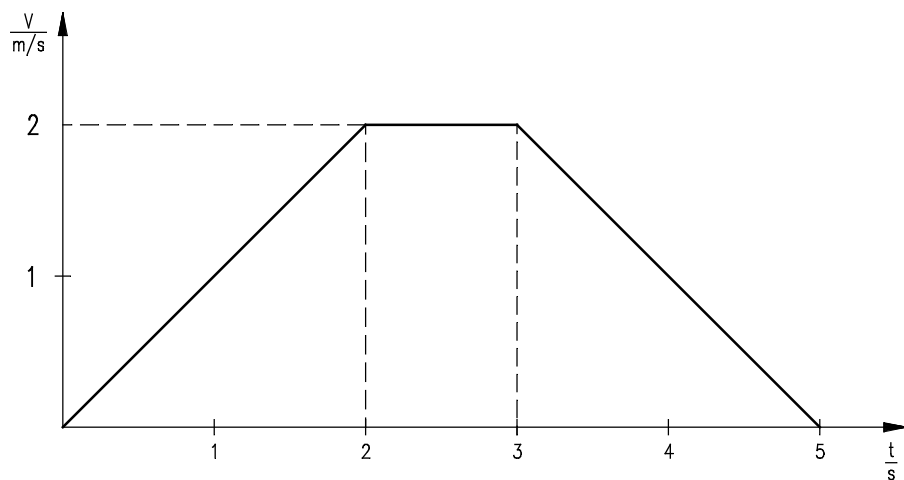
$$v_0 = 0 \frac{m}{s} \quad s_0 = 0 \text{ m}$$

$$v_1 = 2 \frac{m}{s} \quad s_1 = 2 \text{ m}$$

$$v_2 = 2 \frac{m}{s} \quad s_2 = 4 \text{ m}$$

$$v_3 = 0 \frac{m}{s} \quad s_3 = 6 \text{ m}$$



**Aufgabe 4.2**

#### 4 Problemstellungen aus dem Bereich der Wärmelehre

##### Aufgabe 1

$$c_2 = \frac{c_1 \cdot m_1 \cdot (\vartheta_1 - \vartheta)}{m_2 \cdot (\vartheta - \vartheta_2)}$$

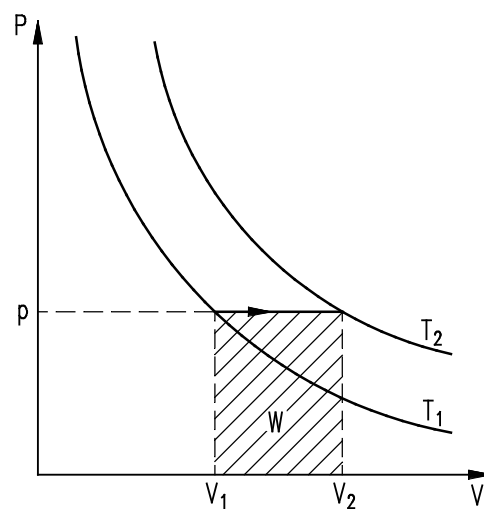
##### Aufgabe 2

$$\vartheta_2 = \frac{\Delta d}{\alpha \cdot d_1} + \vartheta_1 = 115,3 \text{ °C}$$

##### Aufgabe 3.1

$$\frac{V}{T} = \frac{n \cdot R_m}{p} = \text{konst.}$$

##### Aufgabe 3.2 und 3.3



$$W = p \cdot (V_1 - V_2)$$

##### Aufgabe 4

$$V = 4,6 \text{ m}^3$$

**Aufgabe 5**

$$p_2 = p_1 \cdot \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa = p_1 \cdot \left( \frac{\left[ \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot l_1 \right]^\kappa}{\left[ \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot l_2 \right]^\kappa} \right) = p_1 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^\kappa$$

$$= 1 \text{ bar} \cdot \left( \frac{600 \text{ mm}}{600 \text{ mm} - 400 \text{ mm}} \right)^{1,4} = 1 \text{ bar} \cdot \left( \frac{6}{2} \right)^{1,4} = 4,66 \text{ bar}$$

$$\vartheta_2 = 181,7 \text{ °C}$$

**5 Problemstellungen aus dem Bereich der Fertigungstechnik****Aufgabe 1**

$$l_1 = 40 \text{ mm}; \quad l_2 = 20 \text{ mm}$$

$$\tau_{a \text{ Br}} = 400 \text{ Nmm}^{-2}$$

$$A = 500 \text{ mm}^2$$

$$a = 15,5 \text{ mm}$$

**Aufgabe 2**

$$\tau = \frac{F}{A} \leq \tau_{\text{zul}} \rightarrow F_{\text{zul}} = \tau_{\text{zul}} \cdot A_{\text{vorh}}$$

$$A_{\text{vorh}} = d \cdot \pi \cdot s = 35 \text{ mm} \cdot \pi \cdot 1,75 \text{ mm}$$

$$\text{Belastbarkeit des Sicherungsringes } F = 57,7 \text{ kN}$$

**Aufgabe 3**

$$\begin{array}{ll} \text{Zwischenwerte:} & l_{\text{ges}} = 173 \text{ mm} \\ & F_{\text{erf}} = 276,8 \text{ kN} \end{array}$$

$$\text{Von Punkt Null aus: } x_0 = 18,3 \text{ mm}, \quad y_0 = 27,3 \text{ mm}$$

**Aufgabe 4**

$$d_{\text{St erf}} = 110 \text{ mm}$$

Innenhöhe des Gefäßes 55 mm

$$h = 57 \text{ mm};$$

Rondendurchmesser  $D = 200 \text{ mm}$

Bei den vorgegebenen Maßen gehen in das Gefäß 0,523 Liter.

**Aufgabe 5**

$$D = 50,9 \text{ mm}$$

$$m = 16,5 \text{ g}$$

**Aufgabe 6**

Der Schnittgeschwindigkeitstabelle kann  $v_c$  entnommen werden. Zu beachten ist, dass der Wert um 30 % bis 50 % vermindert werden muss, da es Hartguss ist. Hier wurde um 30 % verringert!

**Aufgabe 6.1**

$$v = d \cdot \pi \cdot n \Rightarrow n = \frac{v_c \cdot 1000}{d \cdot \pi} = \frac{16 \cdot 0,7 \cdot 1000}{100 \cdot \pi} = 35,6 \text{ min}^{-1}$$

Drehzahl  $n_1 = 35,5 \text{ min}^{-1}$  gewählt

**Aufgabe 6.2**

Spanungsquerschnitt  $A = 0,2 \text{ mm}^2$

**Aufgabe 6.3**

Schnittkraft  $F_C = 1022,15 \text{ N}$

**Aufgabe 6.4**

Schnittleistung  $P_C = 190 \text{ W}$

**Aufgabe 7**

Der Schnittgeschwindigkeitstabelle kann  $v_c$  entnommen werden. Zu beachten ist hier, dass die Werte um 20 % zu vermindern sind, wenn die Schnitttiefe  $> 2,25 \text{ mm}$  ist.

Der Gesamtwirkungsgrad ist das Produkt der Einzelwirkungsgrade!

### Aufgabe 7.1

Erforderliche Drehzahl  $396 \text{ min}^{-1}$   
Gewählte Drehzahl  $355 \text{ min}^{-1}$

### Aufgabe 7.2

Schnittkraft 2,85 kN

### Aufgabe 7.3

Schnittleistung 6,92 kW

### Aufgabe 7.4

Maschine B ist zu verwenden!

### Aufgabe 8

Erreichbarer Wellendurchmesser 45,92 mm

Zwischenergebnisse:

$$P_C = 5,166 \text{ kW}$$

$$F_C = 3099,6 \text{ N}$$

$$k_C = 2673,7 \text{ Nmm}^{-2}$$

$$A = 0,8164 \text{ mm}^2$$

$$a_p = 2,04 \text{ mm}$$

### Aufgabe 9

$$P_c = 7150 \text{ W}$$

$$P_{\text{antr}} = 9167 \text{ W}$$

### Aufgabe 10.1

$$v_{c \text{ vorh}} = 84,76 \text{ m/min bei } n = 355 \text{ min}^{-1}$$

### Aufgabe 10.2

$$a_p = 1,86$$

$$d = 72,3 \text{ mm}$$

### Aufgabe 11

Vorschub  $f = 0,15 \text{ mm}$

Das besondere Problem der Fragestellung ist, dass der unbekannte Vorschub  $f$  in zwei Gleichungen auftritt.

Spanfläche  $A = a_p \cdot f$

Spez. Schnittkraft  $k_c = \frac{k_{c1.1}}{h^{m_c}} = \frac{k_{c1.1}}{(f \cdot \sin 60^\circ)^{m_c}}$

Diese Gleichungen müssen verknüpft werden.

$A$  lässt sich bestimmen über  $A = \frac{F_c}{k_c} = a_p \cdot f$

$F_c$  kann über die Leistung ermittelt werden.

$$P_c = \eta \cdot P_{\text{mot}} = F_c \cdot v_{c \text{ vorh}} \Rightarrow$$

$$F_c = \frac{P_{\text{mot}} \cdot \eta}{v_{c \text{ vorh}}} = \frac{1200 \text{ W} \cdot 0,8 \cdot 60 \text{ s}}{50 \text{ m/min}} = 1152 \text{ N}$$

$$f = \frac{F_c}{k_c \cdot a_p} = \frac{F_c (f \cdot \sin \kappa)^{m_c}}{k_{c1.1} \cdot a_p}$$

$$f^{1-m_c} = \frac{F_c (\sin \kappa)^{m_c}}{k_{c1.1} \cdot a_p}$$

$$f^{0,83} = \frac{1152 \text{ N} (\sin 60^\circ)^{0,17} \cdot \text{mm}^2}{1800 \text{ N} \cdot 3 \text{ mm}} = 0,208 \text{ mm}$$

$$f = \underline{\underline{0,15 \text{ mm}}}$$

## Mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Problemstellungen

### Thema 1: Schwingungs- und Wellenlehre

#### Lösungshinweise

Federkonstante c:	1000 kg/s <sup>2</sup>
Schwingungsdauer T:	2,35 s
Frequenz f:	0,426 1/s
max. Geschwindigkeit $v_{\max}$ :	4 m/s
zusätzliche Beschleunigung a:	10,69 m/s <sup>2</sup>
maximale Kraft $F_{\max}$ :	2896,6 N

## Mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Problemstellungen

### Thema 2: Optik

#### Lösungshinweise

Gegenstandsweite g:	10,2 cm
Bildweite b:	509,8 cm
Bildgröße 1:	25 cm
Bildgröße 2:	150 cm
Abbildungsmaßstab A:	50

## Mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Problemstellungen

### Thema 3: Mechanik

#### Lösungshinweise

Länge der Transportrutsche:	7,85 Meter
Neigungswinkel:	22,47 Grad

## Mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Problemstellungen

### Thema 4: Wärmelehre

#### Lösungshinweise

Heizwert lufttrockenes Holz:	16,106 MJ/kg
erforderliche Holzmasse:	43,672 t
Jahresbrennstoffkosten Brennholz:	3494 €
Jahresbrennstoffkosten Heizöl:	6300 €

## Mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Problemstellungen

### Thema 5: Fertigungstechnik

#### Lösungshinweise

$F_{\text{ges}}$ =	522,35 kN
⇒ gewählt wird das Folgeschnittverfahren	
$F_{\text{innen}}$ =	119,15 kN
$F_{\text{außen}}$ =	403,20 kN

Schwerpunkt Außenkontur:  $x_0 = 46,67$  mm,  $y_0 = 46,67$  mm  
 Schwerpunkt Innenkontur:  $x_0 = 29,15$  mm,  $y_0 = 16,29$  mm  
 Gewicht des Blechprofils:  $m = 150,04$  g,  $G = 1,47$  N  
 Ausnutzungsgrad: Lage 1 48,16 % Verschnitt, Lage 2 22,54 % Verschnitt